根號 2 是無理數

bee*

112.01.23

來個不一樣的。

1. 前言

打開 google，可以找到蔡聰明老師【 $\sqrt{2}$ 是無理數的證明 】一文，裡面列出了 28 個證明方法，如果你想知道 $\sqrt{2}$ 是無理數的證明，請認眞閱讀老師的文章。

2. 無理數

有理數之名翻譯於 rational number，原意是 ratio-nal number，可寫成比值型態的數，就是我們熟知的分數型態 $\dfrac{q}{p}$，其中 p 是正整數、q 是整數。

無理數，就是不能寫成分數型態的數。不能，意思是我們沒有直接的方法，不曉得該如何做，才能好好的表示這類的數。

$\sqrt{2}$ 來自於畢氏定理，單位正方形的對角線長。這數來的自然，但 $\sqrt{\quad}$ 這符號就透漏著我們的無奈，只能用一個美美的符號來表示它。

$x^2 = 2$ 的正根 (root)$\sqrt{2}$，符號 $\sqrt{\quad}$ 取自 root 的第一個字母 r。

3. 標準分解式唯一

任給一個正整數 n，都恰有一個唯一的標準分解式，即

$$n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}$$

其中 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 是質數。

*bee 美麗之家: http://www.beehome.idv.tw

雖然標準分解式唯一是一個必須被證明的性質。不過，當你從 2 開始去做 n 的分解時，其實可以理解這道理很簡易。

如果標準分解式唯一，那麼，把 $\sqrt{2}$ 表示成 $\dfrac{q}{p}$，就相當於

$$2 = \frac{q^2}{p^2} \Rightarrow 2p^2 = q^2$$

觀察左式，其標準分解式中 2 的次方數是奇數的，右式中則 2 的次方數是偶數的，這牴觸標準分解式唯一的性質。怎會這樣呢？就是想把 $\sqrt{2}$ 表示成 $\dfrac{q}{p}$ 的樣子，是做不到的。

4. 歸謬證明

有很多證明，直接的說，做不到，只好看看它的另一面，這其實就是二分法：不是這樣、就是那樣。因爲不能是分數的樣子，就只好說它是 ir-ratio-nal number—無理數。

不能，本是件頭痛事，但是，在數學的發展史上卻是件好事。因爲 $\sqrt{2}$ 的出現，讓數學家多了好多研究題材。

我們希望數線上的點，都可以表示出來，表示的方法稱爲實數。不過，事與願違，我們沒有啥好辦法，因爲可掌握的數是有理數 — 分數，實數中非有理數的部分 — 無理數，就變成了寶藏。

5. 有限小數

其實，我們不太喜歡分數，主要是當分母很大時，操作起來著實不方便，於是，我們採用十進位，把實數分成 3 類：有限小數、循環小數和無窮的不循環小數。

$\sqrt{2}$ 顯然不能寫成有限小數，因爲一個有限小數的平方，其小數點後的位數會增加爲原來的 2 倍，因此，

有限小數的平方不可能是整數。

於是，

$\sqrt{2}$ 就是無理數啦！

6. $\sqrt{2}$ 是無理數的證明

證明方法如上。

7. 後記

教書後，常常覺得無聊。第一年教國中，有很多幾何題，我習慣不備課，上講台再看，雖然很冒險，但是講台上會產生靈感和挑戰感。

後來到了高中教書，雖然課程稍難，但是依舊很無趣，無趣的原因是【老生常談】，就算不會做，偷看解答也可以，呵呵！還常常罵學生，怎不好好想問題。其實，很多東西，不偷看解答，我也不會啊！

再教幾年，覺得不甘心，這樣過一輩子，教書雖然不會太無趣，但是總對不起學生，我有比以前的老師更出色嗎？

說到這，想起高中三年的數學老師林阿敏老師，她是師大的學姊，大我很多很多屆，在一中，她是很有名的老師，當然，我們也是認眞的學生。她剛好教我三年，這很難得，因爲分班後會換老師，我竟然運氣很好都是她授課的。

因爲不甘心，我偶而會坐在書桌前思索，除了這些現成的方法外，還有其他方法嗎？重點是：

哪一種方法才能道出性質的本質呢？

8. 所以呢？

爲何 $\sqrt{2}$ 不是有限小數，就肯定它是一個無理數呢？

無理數就是不能寫成分數型態的數，而分數一定可以化成有限小數，只要你採用該分數分母之大小的【進位法】即可，故

$\sqrt{2}$ 是無理數。

希望有娛樂到讀者。

9. 補充

還是做個說明好了。

假設我們猜測 $\sqrt{2}$ 等於 $\dfrac{10}{7}$，我們就會把 $\dfrac{10}{7}$ 平方，得到 $\dfrac{100}{49} > 2$，發現不對，所以猜測是錯誤的。接著可以猜測 $\dfrac{99}{70}$，應該會好一點，但是大概不會做平方這一個動作，因爲不好算。那換個方式，我們可不可以用小數來表示呢？

因爲 $\frac{10}{7}=1.3$ (七進位制)，所以 $\left(\frac{10}{7}\right)^2=1.69$，不過這是十進位法，如果採用七進位法，那麼 $\left(\frac{10}{7}\right)^2=1.69=2.02$。七進位的計算較不熟，但沒有問題，平方後自然是一個小數點以下二位的小數，不是整數。

那 $\frac{99}{70}$ 呢？

$\frac{99}{70}=1.29$，這是一個七十進位表示下的小數，把 .29 看成一位喔！平方後就是一個小數點後兩位的數，當然不是整數。這件事對於任意的分數 $\frac{q}{p}$ 都可以，只要採用 p 進位法，這是很容易理解的事情。

如果是這樣，那麼，管他 p 是誰？ $\left(\frac{q}{p}\right)^2$ 都是有限小數，而不是整數。證明就完成啦！

我其實是想找一個可以讓同學理解的方法，而不是想創造一個新方法。於是，想試試看用小數的方式可行嗎？

有限小數的平方會將小數點以下的位數加倍，這是容易理解的事情，所以，$\sqrt{2}$ 決不會是有限小數，這就讓我們把焦點放到無窮小數。

因爲我們已經知道 $\sqrt{2}$ 不是分數，所以應當不是無窮循環小數，只是要證明無窮循環小數的平方不是整數，等於給自己找了另一個難題。

無窮循環小數的平方無法拉回整數，但是不循環的無窮小數卻可以，這眞是一個驚奇。

於是，用小數來證明的想法破滅，我是打算放棄了。但！

小數表示法是採用十進位制，如果我們不採用十進位制呢？任何分數都可以表示成有限小數，這樣，不就把問題解決了。

我希望同學可以有個可能懂得的方式來認識 $\sqrt{2}$ 是無理數這件事實，但是得通過 p 進位，這不是一件簡單事。

我沒有【 直接在課堂上 】嘗試過，就當作是自己的私房想法。

透析性質的本質，是寫證明的要義！

那證明 $\sqrt{2}$ 是無理數的本質是甚麼呢？

我的答案還是標準分解式唯一。

要 $\left(\frac{q}{p}\right)^2$ 是一個整數，除了 p 可以整除 q 之外，哪還有其他可能呢？這是簡易的看法，如果不要嚴格的證明，那這樣想想就好。

對於任意非完全平方數 k，$\sqrt{k}$ 都是無理數。

10. 後記二

在網路搜尋，發現數學傳播 30 卷 4 期 (民國 95 年) 張海潮老師與張鎮華老師寫了一篇【舊題新解 — 根號 2 是無理數】的文章，裡面的思路和本文一樣，從小數切入，分成有限小數和循環小數兩種情形，證明平方後均不爲整數。

我在循環小數前是止步的，而且是一看到就止步了，但是兩位老師就是可以巧妙的得到證明。詳細的內容就請各位自行參閱老師們的文章。

我沒有老師們的功力，只好借用【茶壺原理】[1]來證明，個人覺得把茶壺的水倒掉，也是一個巧妙的手法[2]。

年輕的時候教書時，總喜歡在黑板上展現各種證明方法，表面上很炫、很豐富，後來知道，這對於大部分的學生是一種甜蜜的負擔 (還是不甜蜜)。

於是，我開始思考【可以表現本質的證明方法】。課堂上，我盡量只用一種證明方法，最自然簡單的證明方法，減輕學生的負擔。而在心中，會留有一個能展現本質的證明方法，如果有同學想知道，再分享給他們。

如果本質證法和上課的證法能相同，當然最好，但是，理解本質的證法，可能需要較多的時間體會，只好暫且不用；雖然理解後，會發現那證明竟是如此簡單。

證明數學定理，如果可以縮減成一句中文，該多好！我常常做這件事。

因爲根號 2 不是有限小數，所以根號 2 是無理數。

簡單而動人的證明，最美！

11. 後記三 — 112.02.26

因爲開始整理網頁，我逐次的將寫過的文章再看一下。我並沒有把本文再看一次，倒是看到蔡聰明老師【$\sqrt{2}$ 是無理數的證明】一文前言 — 數學家 Bertrand Arthur William Russell[3] 的一句話：

數學最讓我欣喜的是，事物能夠被證明。

我稍微改一下：

數學最讓我欣喜的是，事物能夠被理解；
又或許因爲可被理解，而有莫名的感動！

[1]茶壺原理：www.beehome.idv.tw/112/1120114.pdf

[2]得有跳脫的思維，想到時，有【啊哈】的快感！

[3]數學家：伯特蘭 · 羅素