

# 淺談質數的意義

bee\*

102.09.09

說說看：何為質數？<sup>1</sup>

## 1. 何為質數

質數 (prime number)？怪怪的名詞。如果向高中小朋友詢問質數是甚麼？相信用功的同學都會說：

質數只有自己和 1 兩個不同的因數。

但是，如果再問：為什麼質數是這樣的意思時？恩！答案是：老師說的，課本寫的，我哪知！

是阿！這個說法很數學，但就是沒有感覺，數學說法一定沒有感覺嗎？不合理吧！那到底什麼是質數呢？

如果這個問題不好答覆，那麼，我們想另一個問題好了：6 是不是質數呢？

當然不是！但是，為什麼呢？

因為

$$6 = 2 \times 3, \text{對嗎?}$$

呀！所以 6 不是質數。這問題簡單，那可以想像甚麼是質數呢？

是不是有點想法：

可以被分解的數不是質數，於是不能被分解的數，就是質數。

---

\*bee 美麗之家: <http://www.beehome.idv.tw>

<sup>1</sup>過往用 word 編排的檔案，112.01.26 重新編排！

因此我們理解到：

可以被分解的數稱為「合成數」，而不能被分解的數，即「非合成數就是質數」。

從上面的討論，我們知道質數是不容易被理解的，但是，合成數卻是比較容易知道的，因此，用合成數來理解質數，是個簡易的方法。

**想想看**：7 是不是質數呢？

要判斷 7 是不是質數，就是要看 7 可不可以分解，因為 7 不太大，所以試著分解看看！因為分解不開，所以 7 是質數。但是，那是因為 7 不是很大，如果不是 7，該怎樣判斷這一個數是不是質數呢？

## 2. 判斷質數的方法

我們的作法是「建立質數表」。

因為 1~100 的質數比較容易判斷，於是我們將所有的質數收集起來：

**1~100 的質數表**：2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,  
31,37,41,43,47,53,59,61,67,71,  
73,79,83,89,97.

算一下，共有 25 個質數。

那麼，如果我們碰到大於 100 的數，該怎樣判斷它是不是質數呢？

**例子**：判別 131 是不是質數？

**想法**：因為質數是「非合成數」，而合成數是可以被分解的意思，所以我們利用質數表來分解 131：

**作法**：計算： $131 \div 2 = 65 \cdots 1$ ， $131 \div 3 = 43 \cdots 2$ ， $131 \div 5 = 26 \cdots 1$ ，  
 $131 \div 7 = 18 \cdots 5$ ， $131 \div 11 = 11 \cdots 10$

當我們看到  $131 \div 11 = 11 \cdots 10$  時，很自然的就會停止，然後判斷「131 是質數」。

**問題**：為何這樣就知道 131 是質數呢？

**答案是**：因為商數已經和除數相等了。

如果我們繼續除下去，那麼商數將會小於除數。假設  $131 \div a = b$ ，而  $b < a$ ，那麼

$131 \div a = b$  應該「已經」出現了，是嗎？

所以，判斷一個數是不是質數的方法為：

「如果一個數  $p$  依序利用質數表的數  $2, 3, 5, \dots$ ，來除都無法整除，那麼  $p$  就是質數。」

其中  $b$  的性質是：

如果  $p$  除以  $b$  所得到的商數  $q \leq b$ ，那麼  $b$  就是我們要檢查的最後一個數，而且  $p$  是質數。

上面的說法很自然，但是有點彘扭。原因是，我們用來檢查的方法，其實是判斷一個數是不是「合成數」的方法，所以應該是：

如果一個數  $p$  依序利用質數表的數  $2, 3, 5, \dots$  來除可以被整除，那麼  $p$  就是合成數。如果無法整除，那麼則為質數。

只是如果不巧一直無法整除時，那麼我們要想想看，除到質數表中的哪一個數就可以停止了  
呢？

答案是：當這一個「質數除數」大於或等於  $\sqrt{p}$  時，就不用再除了，因為這樣就足夠讓我們判斷它是一個質數，而非合成數。

當「質數除數」大於或等於  $\sqrt{p}$  時，就不用再往下除了。

因此可得判斷合成數的方法：

如果  $p$  被一個小於或等於  $\sqrt{p}$  的質數整除，那麼  $p$  就是合成數。

因為如果  $p = a \cdot b$ ，而且  $a \leq b$ ，那麼較小的數  $a$  顯然比  $\sqrt{p}$  來的小，即  $a^2 \leq ab \Rightarrow a \leq \sqrt{p}$ ，所以合成數應該在利用質數表中  $\leq \sqrt{p}$  的質數就可以檢查出來，那如果檢查不出來，故得

**判斷質數的方法**：

如果  $p$  不能被一個小於或等於  $\sqrt{p}$  的質數整除，那麼  $p$  就是質數。

由上面的討論，我們知道「質數表」非常重要，有質數表，我們才可以檢查一個較大的數是不是質數。事實上，利用  $\sqrt{p}$ ，我們知道用  $1 \sim 100$  的質數可以判斷  $1 \sim 10000$  的數是不是質數，而比  $10000$  更大的數，如  $12323$  是不是質數，就得「擴大質數表」。

證明判斷  $p$  是不是質數的方法如下。

**證明**：假設  $p = ab$ ，其中  $a \leq b$ ，且  $a$  是一個質數，則

$$a^2 \leq ab - p, \text{ 即 } a \leq \sqrt{p}。$$

因此，當  $p$  是合成數時， $p$  有一個小於或等於  $\sqrt{p}$  的質因數，而當  $p$  找不到小於或等於  $\sqrt{p}$  的質因數時，可得  $p$  為非合成數 (質數)。

### 3. 爲什麼 1 不該是質數

考慮 1 是不是質數呢？若以「不能分解」當作標準，可得 1 是質數，因爲 1 不能被分解。但是，數學書上都寫 1 不是質數，這到底是怎回事呢？

「可以被分解」，是一個得被理解的動作，想想看，什麼叫做可以被分解？由  $6 = 2 \times 3$ ，我們稱 6 是可以被分解，那由  $7 = 7 \times 1$ ，可說 7 是能被分解的嗎？答案是：

【可被分解】的意思是該數可以寫成【兩個較小數的乘積】。

因此， $6 = 2 \times 3$  是可分解，而  $7 = 7 \times 1$  不是有效的分解。

問題是：那這跟 1 是不是質數，有何關係呢？

原因是：質數除了有不能被分解的特性之外，還要有「可以分解別人」的特性。所以質數一定要大於 1，不然，就不具有分解別人的功能。

因此可分類得：

正整數有 3 類：質數、合成數和 1。

### 4. 結語

有句廣告詞說：科技來自於人性，那數學何嘗不是來自於「合情合理的感覺」呢？因此，

數學的定義來自於合理的感覺。

與大家分享。