算幾不等式

bee[*]

104.09.05

一個簡單且基本的不等式。常常用到，該怎樣體會它呢？

1. 不等式的敘述

$\boxed{\text{算幾不等式}}$：設 $a>0, b>0$。

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

而且僅在 $a=b$ 時，等式 $\dfrac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$ 才會成立。

上面的敘述告訴我們：$\dfrac{a+b}{2}$ 是永遠大於 $\sqrt{ab}$ 的，只有在 $a=b$ 這種特殊的情形下，等式 $\dfrac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$ 才會成立。

舉個例子看看：設 $a=1, b=2$，則 $\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{3}{2}=1.5$，$\sqrt{ab}=\sqrt{2}\approx 1.414$，可見 $\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$。

2. 不等式的代數證明

要比較兩個數的大小，最簡單的想法是將兩個數相減。於是，我們計算

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} &\overset{(*)}{=} \frac{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2}\\ &=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}\geq 0\end{aligned}$$

上面的計算式中，$\overset{(*)}{=}$ 要成立，必須是 a,b 兩個數爲正數時，才能成立，也才有討論的意義。因此，算幾不等式成立的條件爲 $a>0, b>0$。同時，當 $\sqrt{a}=\sqrt{b}$，也就是 $a=b$ 時，$\dfrac{a+b}{2}=\sqrt{ab}$ 才會成立。

[*]bee 美麗之家: http://www.beehome.idv.tw

看一個例子：

例題 **1.** 關於所有周長爲 40 的矩形，哪一個矩形有最大的面積，其面積爲何？

解：設矩形的長爲 a，寬爲 b。由題意可知：$a+b=\dfrac{40}{2}=20$，且 $a>0, b>0$。根據算幾不等式可得：

$$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\Longrightarrow ab\leq\frac{(a+b)^2}{4}=100$$

因此，最大的面積爲 100。

■

問題是：上面的解法並不完全，我們並沒有說明有最大面積時是個怎樣的矩形？

感覺上，最大面積的矩形應該是是正方形，也就是 $a=b$ 時面積最大，當然事實上也是。因爲只有在 $a=b$ 時，不等式的等號才會成立，也就是說，只有在正方形時，面積 ab 才會等於 100。

例題 1 中，我們巧妙的利用算幾不等式得到一個很不錯的性質。如果你想用一條繩子，圍一個矩形，那麼，圍成正方形時，可以圍出最大的面積。

3. 不等式的圖形證明

利用圖形證明算幾不等式是一件很有趣的事情，這是一個數學欣賞。用圖形證明算幾不等式有非常多的方法，我們僅介紹最常見的一種：半圓形法。

半圓形法：圖 1 中，設 C 是 $\overline{AB}$ 上一點，$\overline{AC}=a, \overline{CB}=b$。現在以 $\overline{AB}=a+b$ 爲直徑畫一半圓，O 爲圓心，D 是半圓上一點，且 $\overline{CD}\perp\overline{AB}$。

則 $\overline{CD}=\sqrt{ab}, \overline{OD}=\dfrac{a+b}{2}$，且 $\dfrac{a+b}{2}=\overline{OD}>\overline{CD}=\sqrt{ab}$。

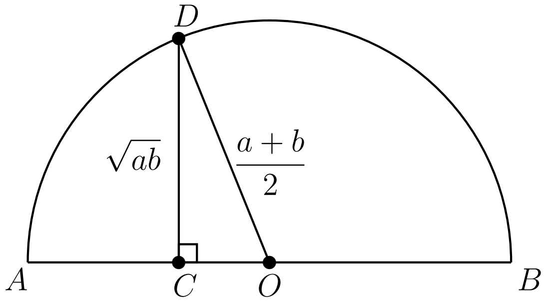

圖 1: 半圓形圖解證明

由圖 1 來看，因爲直角三角形的斜邊大於兩股，所以 $\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$。

但是，爲何 $\overline{CD}=\sqrt{ab}$ 呢？又何時等式會成立呢？可以用一個圖說明嗎？

上面這兩個問題就留給讀者當習題。圖 1 這一個作圖很有意思，有很多的應用。特別是尺規作圖上，是作出根式 $\sqrt{n}$ 的好方法。

4. 不等式的感覺

雖然我們用了兩個方法證明了算幾不等式是正確的，但是，我們可以「感覺到」算幾不等式是正確的嗎？

用例子看看：設 $a=1, b=2$，則 $\sqrt{ab}=\sqrt{2}$。想想看：$1, \sqrt{2}, 2$ 這三個數有何關係？

$$\frac{\sqrt{2}}{1}=\frac{2}{\sqrt{2}}$$

這三個數形成一個等比數列。於是我們仿照的觀察，發現 $a, \sqrt{ab}, b$ 這三個數可以寫成 a, ar, ar^2 的樣子，計算一下：$r=\dfrac{\sqrt{ab}}{a}=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$。

如果 $a\neq b$，我們不妨假設 $b>a$，如此 $r=\sqrt{\dfrac{b}{a}}>1$，那麼 a, ar, ar^2 三數之間的差距如圖 2：

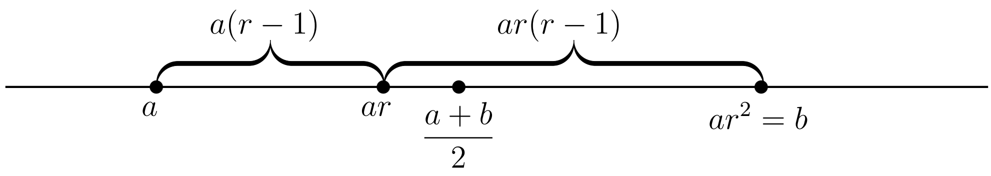

圖 2: 數線看算幾不等式

因爲 $r>1$，所以差距 $ar(r-1)$ 顯然比 $a(r-1)$ 來得大。也因此 $\dfrac{a+b}{2}>ar=\sqrt{ab}$。

總結來說，因爲 $a, \sqrt{ab}, b$ 是一個公比大於 1 的等比數列，所以顯然 $\sqrt{ab}$ 小於 a, b 的中點 $\dfrac{a+b}{2}$。

5. 繼續

算幾不等式可以是 3 個變數，如下：

$\boxed{\text{算幾不等式}}$：設 $a, b, c>0$。

$$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$$

而且僅在 $a=b=c$ 時，等式 $\dfrac{a+b+c}{3}=\sqrt[3]{abc}$ 才會成立。

當然也可以是 4 個變數，或者是 100 個變數。

$\boxed{\text{問題}}$：怎樣說明 3 個變數的算幾不等式是正確的。

雖然這是一個困難的問題，沒有偷看解答應該是做不出來的。不過，如果你熟知本文的內容，做出說明不是很困難的 (眞的喔！沒有騙你，只是得花點時間：一小時以上吧！)。

6. 有趣

做數學有趣的地方在於欣賞，本文期待給你不一樣的觀感，和現在的數學課本有不一樣的地方，且很有趣，

因為可以看到不等式的本質。

【同時可以使用本文的內容】，自己做出看似困難的問題，這才是本文奇妙的地方。

7. 待續

本文沒有寫完，等你自己補好嗎？[1]

[1]其實，我已經在網路上寫過另一篇算幾不等式的文章，裡面有詳細的說明。不過，我把它下架了，因爲，讀者可以自己做出來更好玩。