

微積分基本定理

bee*

104.09.10 ~ 104.09.13

歷史上的一大步，是累積了許多前人的一小步。

1. 前言

微積分基本定理整合了微積分的兩個運算：「微分」與「積分」，其主要的目的是「求面積」。求怎樣的面積呢？求「函數」與「 x 軸」之間的面積。求面積一直是古早數學家很想處理的問題，但是都找不到很簡單的方法可以做到，直到牛頓與萊布尼茲發現了「面積」與「高函數」之間的關係，才有重大的突破。

2. 基本定理的敘述

微積分基本定理：設 $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ 是一個連續函數，並設 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ，

則：(1) $F : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ 是一個可微函數，且 $\frac{dF}{dx} = f$ 。

$$(2) \int_a^b f(x)dx = F(b)。$$

這個定理很有意思！定理說：對於任意的連續函數 f ，計算面積的函數 $y = F(x)$ 和原函數 f 有一個簡單的關係 $\frac{dF}{dx} = f$ ，如果我們可以透過這一個關係找出 $F(x)$ ，那麼我們想要計算的面積就可以用函數值 $F(b)$ 來表示。如圖 1 所示：

*bee 美麗之家: <http://www.beehome.idv.tw>

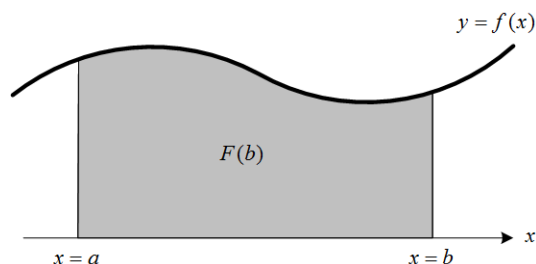


圖 1: 微積分基本定理的圖解

因為「只要」找到函數 F 就可以知道圖 1 中灰色部分的面積，因此，我們稱 F 為面積函數。

面積函數寫成 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 是一個「不容易看懂」但「非常有趣」的寫法，我們很想知道為何數學式子會寫成這個樣子，又其意義為何？

另外你可能想知道，為何微積分基本定理要分成 (1), (2) 兩個部分，有其特別的意義嗎？

3. 面積的定義 — 黎曼積分

要瞭解「求面積」(積分)，首要清楚何為面積？

面積的概念來自於長方形的面積：長乘以寬。雖然長方形的面積之定義得來自於實數的建構，但是在這裡我們暫時不理它，直接拿來用。然後採取古早古早數學家就知道的「分割法」來定義函數 $y = f(x)$ 與 x 軸之間的面積，而這也就是有名的「黎曼和」。

黎曼和：設函數 $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ ，則由直線 $x = a, x = b, x$ 軸與曲線 $y = f(x)$ 所圍成的面積定義為：

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i$$

其中我們將區間 $[a, b]$ 分割成 n 個區間 $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n]$ ， $t_0 = a, t_n = b$ ，而 x_i^* 是區間 $[t_{i-1}, t_i]$ 中的一個值， $\Delta x_i = t_i - t_{i-1}$ 。

上面這一個定義實在很複雜，對於初學者來說很困難，不過沒有關係，讓我們畫個圖看看：根據圖 2，作一些說明：

- 把區間分成 n 個，我們稱之為「分割」(不一定是均等分割)。
- 在每一個區間內選取一個點 x_i^* ，然後以 $f(x_i^*)$ 當作高，每個區間的長 $\Delta x_i = t_i - t_{i-1}$ 當作寬，而 $f(x_i^*) \Delta x_i$ 的值的意義就是一個長方形的面積。
- 我們把選取的長方形面積總和當作曲線 $y = f(x)$ 和 x 軸在直線 $x = a$ 與 $x = b$ 之間所圍成的面積。這樣的作法顯然有風險，但是我們期待：當分割的區間數越多時，則我們的選取方法會越來越好，甚且在「極度細小的分割下」(取極限) 可以達成「找到面積」的目標。

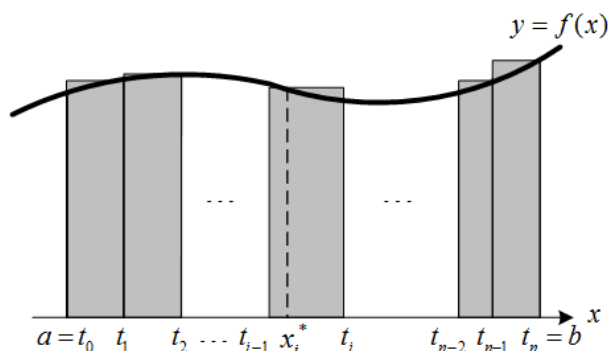


圖 2: 黎曼和的圖解

- 要留意， $f(x_i^*)$ 的值不一定是一個正數，因此， $f(x_i^*)\Delta x_i$ 所表示出來的面積是一個「可正可負」的「有向面積」。
- 雖然上面的定義，提供了一個計算面積的方法。但是，事實上，它只是一個定義，因為在這一一個定義下，可能不是所有函數之黎曼和的極限值都存在，所以我們並沒有辦法知道「面積是否存在」？又這一個定義很難執行，在任意分割下求取面積的極限是極度困難的工作，因此，它不會是一個「理想的方法」。
- 上面的分割可以採用「均等分割」嗎？如果可以，是不是黎曼和的定義會簡單一點呢？

看過上面的說明，可以知道黎曼和定義採用的是大家原本就知道用來求「非多邊形區域面積」的傳統方法，並不會超出你的想像很遠，問題是：這件事難度很高！於是我們不禁想問：

- 那種函數的黎曼和是存在的呢？
- 求黎曼和有簡便的方法嗎？
- 把黎曼和的定義改成如下的樣子，好嗎？

黎曼和：設函數 $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ ，則由直線 $x = a, x = b, x$ 軸與曲線 $y = f(x)$ 所圍成的面積定義為：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left[f(x_i^*) \cdot \frac{b-a}{n} \right]$$

其中 x_i^* 是區間 $\left[a + \frac{(i-1)(b-a)}{n}, a + \frac{i(b-a)}{n} \right]$ 中的一個值。

結論是：只要 $y = f(x)$ 是一個連續函數，那麼，上面的問題都好解答。

- 連續函數的黎曼和必然存在。
- 連續函數可以利用微積分基本定理求到其黎曼和。

- 作均等分割就可以定義黎曼和了。

把 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left[f(x_i^*) \cdot \frac{b-a}{n} \right]$ 這一個數學式子美化後，就得到 $\int_a^b f(x)dx$ ，這真是一個美麗的數學符號。其中 dx 表示極小分割的長度 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n}$ ， $f(x)dx$ 就是長方形面積， \int_a^b 指的是從 $x = a$ 到 $x = b$ 之間的面積。

妙哉！

4. 待解決的問題

接下來我們剩下兩件事情該做：

1. 證明微積分基本定理是正確的。
2. 把你知道的各種連續函數拿來試試看！這就變成了「積分學」。

在高等微積分中，證明微積分基本定理必然是一件很重要的事情 (但這不是本文要做的事情)¹，而在初等微積分中，我們至少要把「基本函數的積分」做到透徹。事實上，積分這個動作是很困難，有太多問題要討論，其中有很多問題事實上做不出來，因此，該學的積分技巧很多，而對於無法做出來的積分問題，就會出現「數值分析的方法」。因為積分這件事很困難，所以這裡會有許多寶藏。你能做的事情就是「盡情的練習」，一直到「極度熟練為止」。

5. 再看微積分基本定理

我們把微積分基本定理再看一次。

微積分基本定理：設 $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ 是一個連續函數，並設 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ，

則：(1) $F : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ 是一個可微函數，且 $\frac{dF}{dx} = f$ 。

$$(2) \int_a^b f(x)dx = F(b)。$$

- 定理的條件是在閉區間上的連續函數 f ，這說明在連續函數下，我們可以做求面積的工作。
- 設 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ，表示我們期待黎曼和是可定義的，其極限值是存在的，這樣就有計算面積的意義。

¹補上證明：<http://www.beehome.idv.tw/paper/1111006.pdf>

- 我們得到的結論 (1) 是 F 是一個函數。呀！這真棒，這表示當 f 是一個連續函數時， F 的函數值是存在的 (數學上稱為 well-defined)，也就說明黎曼和是存在的 (是可以求面積的)。
- F 不是一個單純的函數而已喔，它是可微的。事實上，當 f 連續時，我們觀察其面積變化是「很溫和的」(數學上稱為可微)，仔細一看，這是很自然的事情。
- 將 F 微分後將得到 f ，呀！這樣子我們就把「面積函數 F 」和「原函數 f 」拉上關係了。
- 如果你可以找到函數 F ，那麼，根據 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ，你就可以得到第二個結論

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)。$$

不過翻開微積分課本，幾乎所有課本敘述的微積分定理皆分成如下兩個部分，和本文的敘述有所不同，想想看！為何寫法不同？

微積分基本定理：

I：設 $f : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ 是一個連續函數，並設 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ，

則 $F : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ 是一個可微函數，且 $\frac{dF}{dx} = f$ 。

II：若 $G : (a, b) \rightarrow \mathbf{R}$ 是一個可微函數，且 $\frac{dG}{dx} = f$ ，

則 $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$ ，並記為 $G(x)|_a^b$ 。

本文一開始就問過一個問題： $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 為何寫成這個樣子？這是一個積分式子，有上限 x ，下限 a ，在微積分課本中稱之為「定積分」。不過，一般定積分的上下限是固定的，而這裡的上限 x 是變動的。於是，在 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 中，當你計算面積時， t 在動， x 不動，而當你求面積後，我們又把 x 當變數，讓它動，於是，定積分 $F(x)$ 就形成一個 x 的函數，是一個面積函數。

雖然我們在 x 軸上求面積，理當變數是 x ，但是避免和後面的動作發生重複符號的情形，所以請 t 來幫忙。如圖 3 所示：

因此在定理 I 中告訴我們： F 是一個 well-defined 的函數，而且 F 和 f 有一個很棒的 $\frac{dF}{dx} = f$ 的關係。但是找面積函數卻不一定要找 F 。在定理 II 中告訴我們：只要你找到一個函數 G ，滿足

$\frac{dG}{dx} = f$ ，那麼，你就可以用 $G(b) - G(a)$ 來當作定積分 $\int_a^b f(x)dx$ 的值。

為什麼？

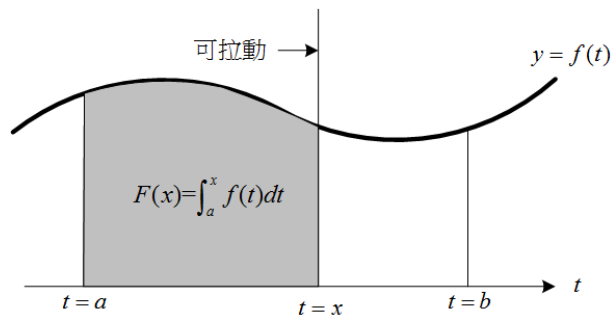


圖 3: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ 的圖解

因為滿足 $\frac{dG}{dx} = f$ 這種關係的函數很多，不是恰有一個而已。事實上，這些函數都只差一個常數，即 $G = F + k$ 。因此，以代數的計算觀點來看：

$$G(b) - G(a) = (F(b) + k) - (F(a) + k) = F(b) - F(a) = F(b) - F(0) = \int_a^b f(x)dx$$

而實際意思是： $G(x) = \int_c^x f(t)dt$ ，它是從某一個 c 點出發所計算出來的面積函數，雖然不一定和 a 值相同，但是，利用面積差就可以得到我們想知道的定積分 $\int_a^b f(x)dx$ ，如圖 4 所示：

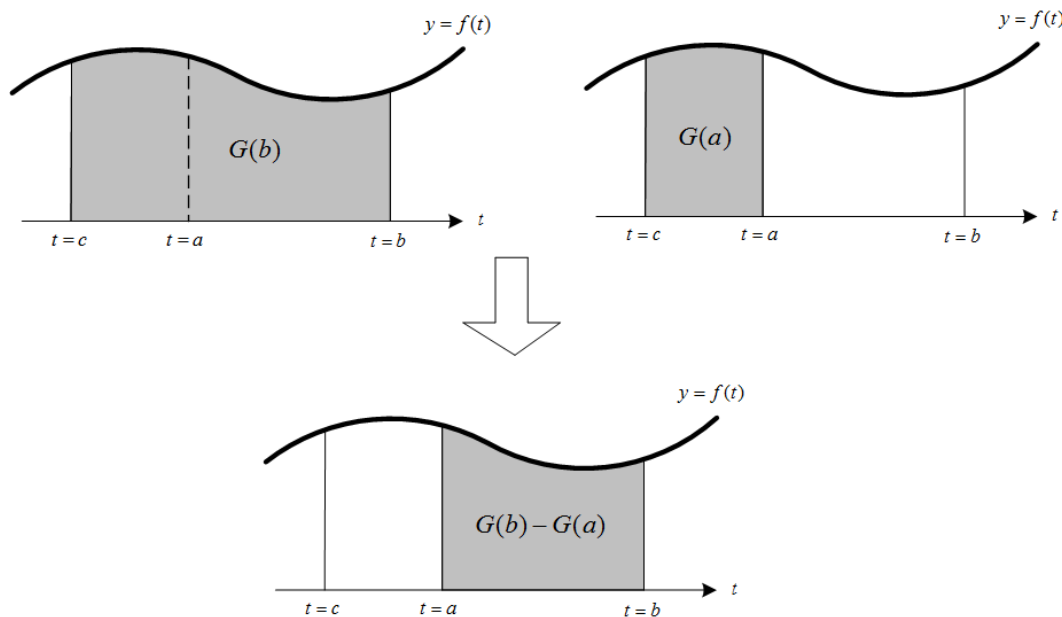


圖 4: $\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$ 的圖解

如果你想用本文的微積分基本定理，那麼你尋找的函數 F 必須滿足兩個條件：

1. $\frac{dF}{dx} = f$ 。
2. $F(a) = 0$ 。

事實上這樣做也很好，我們把 $F(a) = 0$ 當作函數 F 的一個條件，也就是要找滿足這條件的 F ，如此， $\int_a^b f(t)dt$ 就等於函數值 $F(b)$ 。

6. 結語

每一個定理的發展，都是累積很多數學家的想法而成的。

本文只是一個引子，想說明要理解一個定理需要花很長的時間，不停地思索，每次思索，就會有更深刻的認識。希望本文的讀者，可以享受您的研究樂趣²。

²111 年修訂。