變形的餘式定理

bee*

104.09.25 †

因為要方便計算函數值，所以我們需要餘式定理，

有時候，還必須變形！

1. 想一個問題

問題：設 $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 - 2x + 2$，求 $f(\sqrt{2}+1)$ 的值。我們有四招可以處理這樣的問題：

- 直接計算。
- 綜合除法與原始的餘式定理。
- 泰勒式。
- 變形的餘式定理

直接計算法交給你，我來說說另三個方法。

2. 綜合除法與原始的餘式定理

我們知道當多項式 $f(x)$ 除以 $x-a$ 時，可以將 $f(x)$ 變形成 $(x-a)q(x)+f(a)$，即

$$f(x) = (x-a)q(x) + f(a)$$

因此當我們用 $x-a$ 除 $f(x)$ 時，所得到的餘式就是函數值 $f(a)$。
那，如何求得 $f(\sqrt{2}+1)$ 呢？答案是：綜合除法。
底下是我們的計算過程：

$$\begin{array}{cccccc|c}
2 & -3 & -3 & -2 & 2 & & \sqrt{2}+1 \\
 & 2\sqrt{2}+2 & \sqrt{2}+3 & \sqrt{2}+2 & \sqrt{2}+2 & & \\
\hline
2 & 2\sqrt{2}-1 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2}+4 & &
\end{array}$$

可得餘式 $f(\sqrt{2}+1) = \sqrt{2}+4$。看來，這一個解法不錯喔！

*bee 美麗之家: http://www.beehome.idv.tw

†今天有點特別！

3. 泰勒式

利用綜合除法，我們也可以將 $f(x)$ 改成 $(x-1)$ 的泰勒式，即

$$f(x)=2(x-1)^4+5(x-1)^3-9(x-1)-4,$$

於是，計算 $f(\sqrt{2}+1)=2\cdot(\sqrt{2})^4+5\cdot(\sqrt{2})^3-9\cdot\sqrt{2}-4=\sqrt{2}+4$。

找 $x-1$ 的泰勒式也是不錯的方法。

4. 變形的餘式定理

啥是變形的餘式定理呢？我寫在下面，你看看可否理解喔！

設 $x=\sqrt{2}+1$。則

$$\begin{aligned} x-1=\underline{\qquad}\sqrt{2} &\Rightarrow (x-1)^2=(\underline{\qquad}\sqrt{2})^2 \\ &\Rightarrow x^2-2x-1=0 \end{aligned}$$

將 $f(x)$ 除以 x^2-2x-1，把 $f(x)$ 改成

$$f(x)=(x^2-2x-1)(2x^2+x+1)+(x+3),$$

於是，$f(\sqrt{2}+1)=0+(\sqrt{2}+1)+3=\sqrt{2}+4$。

這實在是一個很有趣的解法，但是，爲何是正確的呢？

如果你把上面 ____ 裡加上 $\pm$，你會發現整個推論依然是正確的，這說明方程式 $x^2-2x-1=0$ 的兩根爲 $\pm\sqrt{2}+1$，也就是說二次式

$$x^2-2x-1=(x-(\sqrt{2}+1))(x-(\sqrt{2}-1))$$

即

$$f(x)=(x-(\sqrt{2}+1))(x-(\sqrt{2}-1))(2x^2+x+1)+(x+3),$$

這樣你看出來爲何可以這樣做了嗎？

我把這一個方法稱爲變形的餘式定理。求函數值，只要找到「適當的除式」，做適當的除法，

餘式可以代替原函數來求函數值。

5. 結語

回想一下！除法的功能是把函數變形：$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$，而變形後的餘式可以取代原函數，透過「除法降次」，可以把求函數值的問題變簡單喔！