

# 奇函數與偶函數

bee\*

104.09.30

很特別的函數：奇函數與偶函數。

何為奇函數、偶函數呢？為何要介紹奇函數或偶函數呢？

怪怪！2-1 課本裡的天外一筆，其弦外之音為何？

## 1. 前言

在第二章裡，我們僅想瞭解多項式函數的圖形，看看是不是可以透過一些方法瞭解多項式函數？或者說該怎樣可以畫出多項式函數的圖形來。

因為多項式函數是既基本又非常有用的函數，所以我們想瞭解多項式函數，其中，從先瞭解「單項式函數」開始，是一個簡單的方法。

## 2. 單項式函數

透過電腦軟體，我把幾個函數畫在同一個坐標平面上，如圖 1, 2 所示：

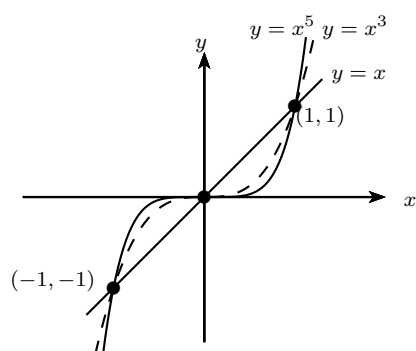


圖 1: 奇數次單項式函數圖形

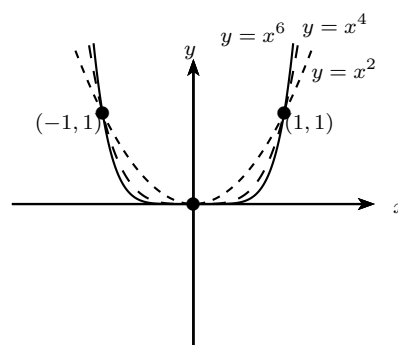


圖 2: 偶數次單項式函數圖形

\*bee 美麗之家: <http://www.beehome.idv.tw>

從圖 1 可以發現奇數次單項式函數的圖形對稱於原點，而由圖 2 可已發現偶數次單項式函數的圖形對稱於  $y$  軸，所以，我們把奇數次單項式函數稱為「奇函數」，而把偶數次單項式函數稱為「偶函數」。

然後，把這樣的概念再加以推廣：

- 函數圖形「對稱於原點」的函數，通通稱為「奇函數」。原點稱為「對稱中心」。
- 函數圖形「對稱於  $y$  軸」的函數，通通稱為「偶函數」。  $y$  軸稱為「對稱軸」。

### 3. 奇函數、偶函數的特性

好！請你回想一下：奇函數和偶函數的「幾何特性」為何 (也就是圖形特性)？

- 奇函數的函數圖形「對稱於原點」。
- 偶函數的函數圖形「對稱於  $y$  軸」。

於是有兩個問題：

- 函數圖形「對稱於原點」的函數有何特性？
- 函數圖形「對稱於  $y$  軸」的函數有何特性？

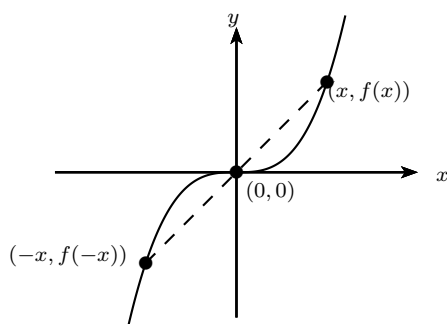


圖 3: 奇函數圖形的對稱

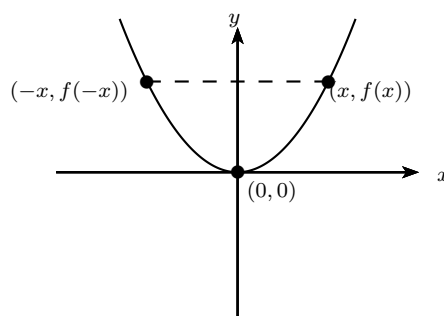


圖 4: 偶函數圖形的對稱

- 由圖 3 可得：奇函數滿足  $f(x) + f(-x) = 0$ ，也就是  $f(-x) = -f(x)$ 。
- 由圖 4 可得：偶函數滿足  $f(x) = f(-x)$ 。

我們把上面兩點稱為奇函數、偶函數的「代數特性」。

## 4. 回顧

由單項式函數出發，我們推廣得兩類特殊的函數：「奇函數」與「偶函數」的意義。同時，得到此二類函數的「幾何特性」與「代數特性」。

所以請你寫下來：

1. 幾何特性：

(a) 奇函數：

(b) 偶函數：

2. 代數特性：

(a) 奇函數：

(b) 偶函數：

## 5. 多一些例子

奇偶函數由單項式函數推廣來，可是，推廣後就不僅僅是單項式函數而已。

例如：最簡單的「車禍函數  $y = |x|$ 」，就是一個偶函數，如圖 5：

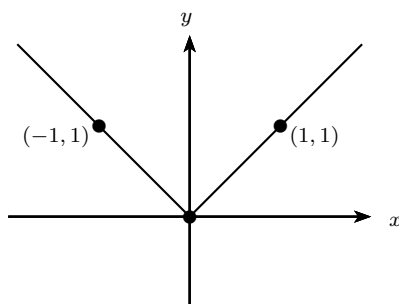


圖 5: 偶函數的例子  $y = |x|$

又例如：有趣的「波浪函數  $y = \sin(x)$ 」，就是一個奇函數，如圖 6：

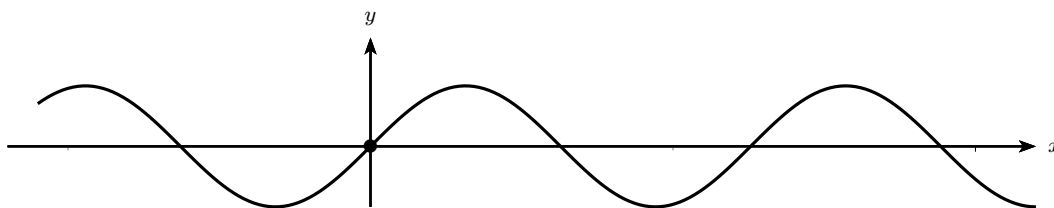


圖 6: 奇函數的例子  $y = \sin(x)$

又例如另一個「波浪函數  $y = \cos(x)$ 」，又變成一個偶函數，如圖 7：

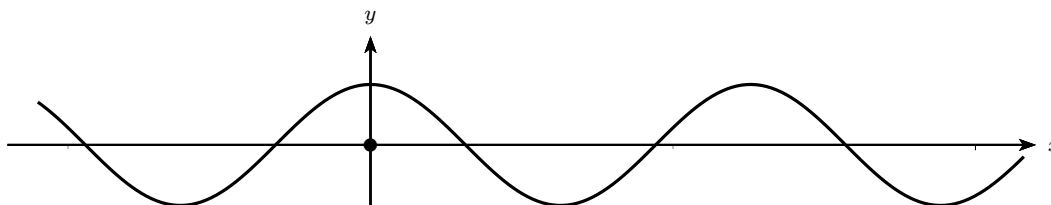


圖 7: 偶函數的例子  $y = \cos(x)$

## 6. 結語

我拉哩拉紮的說了很多，你應該對奇函數、偶函數有了基本的認識，但是，有一個問題：我們研究奇偶函數有何用處呢？

還記得我希望各位繪製  $y = x^5 - 3x + 2$  的函數圖形嗎？月考後，我們會繼續討論！屆時奇偶函數會扮演重要的角色。你也將會知道為何要了解奇偶函數的特性。

叮嚀一下！月考前，把課本、習作本完全弄懂，然後找一些講義「簡單的問題」挑戰一下。老實說，數學問題真的很難，但是只要你肯於挑戰，你會發現：其實你還滿厲害的！加油！