$1+\cos\theta+i\sin\theta$ 之無言的證明

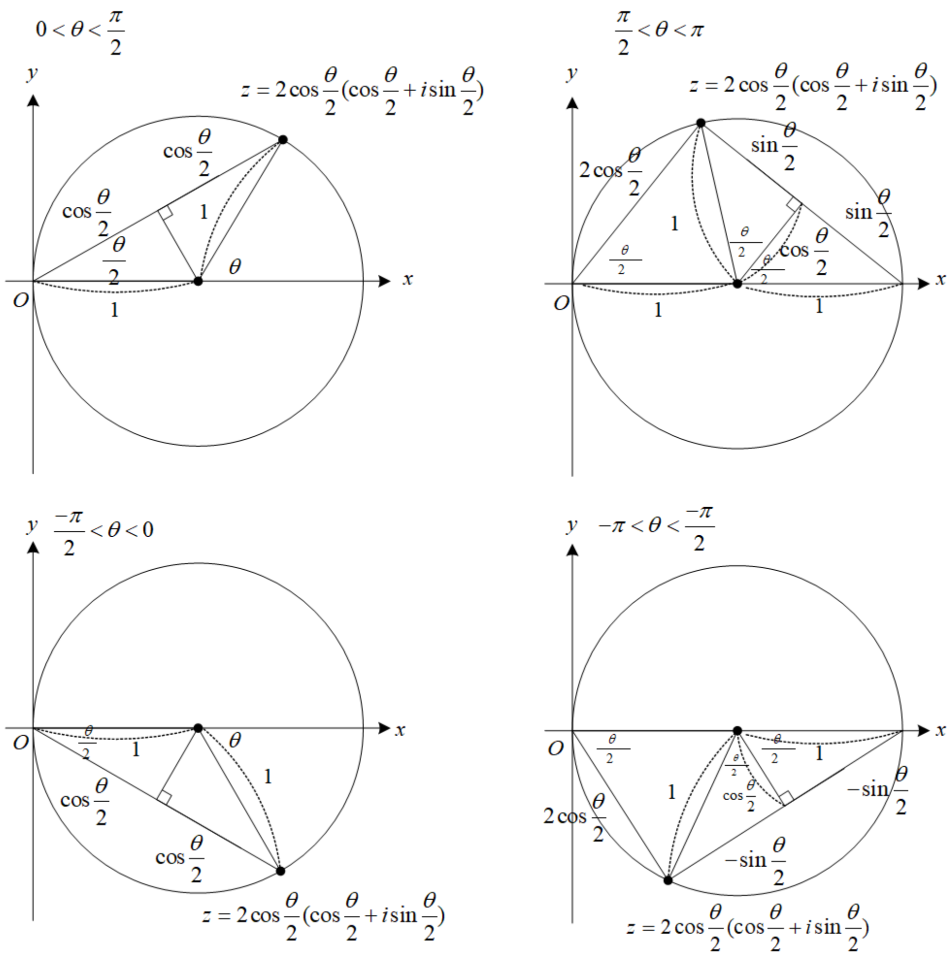
bee*

104.10.19

數學的唯一特徵 —— 美妙。

1. 圖解真美

$$z=1+\cos\theta+i\sin\theta=2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$



*bee 美麗之家: http:/www2.chsh.chc.edu.tw/bee

2. 代數解法

分別求 $1+\cos\theta+i\sin\theta$ 的長與幅角。

(1) $1+\cos\theta+i\sin\theta$ 的長爲

$$\begin{aligned}\sqrt{(1+\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2}&=\sqrt{2+2\cos\theta}\\&=\sqrt{2+2\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\right)}\\&=\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}=\left|2\cos\frac{\theta}{2}\right|\end{aligned}$$

(2) $1+\cos\theta+i\sin\theta$ 的幅角爲

(a) $2\cos\dfrac{\theta}{2}\geq 0$：(當 $0\leq\theta<\pi$)

$$\begin{aligned}1+\cos\theta+i\sin\theta&=1+\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\right)+i\cdot\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)\\&=2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)\end{aligned}$$

(b) $2\cos\dfrac{\theta}{2}\leq 0$：(當 $\pi\leq\theta<2\pi$)

$$\begin{aligned}1+\cos\theta+i\sin\theta&=1+\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1\right)+i\cdot\left(2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)\\&=-2\cos\frac{\theta}{2}\left(-\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}\right)\end{aligned}$$

當我們一開始把主幅角規定在 $-\pi\leq\theta<\pi$，那麼我們就可以保證 $2\cos\dfrac{\theta}{2}\geq 0$，如此，$1+\cos\theta+i\sin\theta$ 就會有非常漂亮的結果：

$$1+\cos\theta+i\sin\theta=2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

3. 結語

規定可以依需要而有所改變。

無言的圖解，眞是美麗！