一個連通但非線連通的例子

bee*

104.10.23

我們想造一個平面上的連通集 (connected set)，但是越弱越好，

弱到不會線連通 (non-path-connected set)！

1. 從有理數下手

有理數，有稠密性，所以被考慮，我們先找 $Q \times Q$。

很糟糕的是：以原點 O 爲圓心，$\sqrt{2}$ 爲半徑的「開圓盤內部」當作 A,「圓盤外部」當作 B，$Q \times Q$ 就被 A, B「切開了」(這裡不知道有啥數學上的專用說法，另這一個方法說明 R^2 上切開一個集合 S 的方法，就是找一個特殊的線 (就是邊界)，把 R^2 分成兩部分。但邊界上沒有 S 的元素)。

加強一下：找 $Q \times R$。

如果 $Q \times R$ 被兩個開集合 A, B 分割了，並假設原點 O 在 A 中，那麼根據開集合的定義，可以找到一個無理數的半徑 d，使得開圓盤 $(O, d) \subset A$，但是，這次，(O, d) 不可能取代 A，因爲 (O, d) 的邊界上有 $Q \times R$ 上的點，顯然，(O, d) 不夠大，於是，把 (O, d) 往上往下分別延伸，得到一長條狀 $(-d, d) \times R$，把這集合當作 A，$((-\infty, -d) \cup (d, \infty)) \times R$ 當作 B，又可以將 $Q \times R$「切開了」。

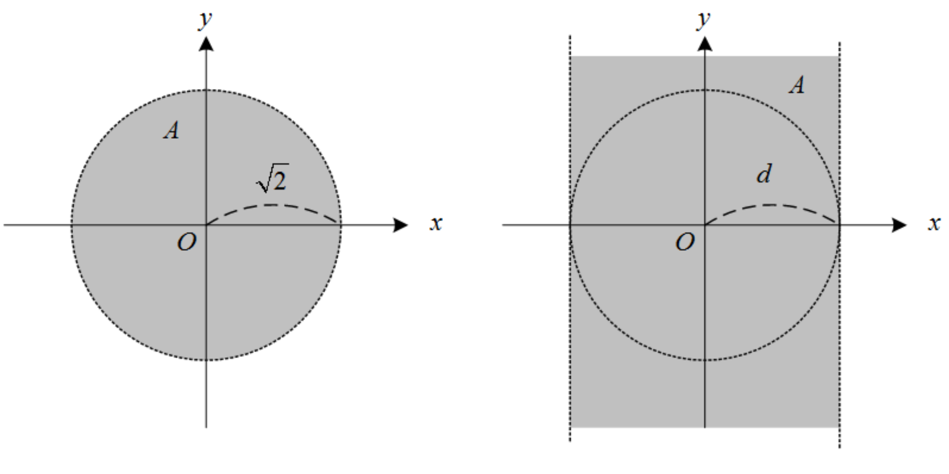

圖 1

*bee 美麗之家: http://www.beehome.idv.tw

2. 請無理數幫忙

以 x 軸為界，上下錯位。找 $Q \times R^{+} \cup \overline{Q} \times (R^{-} \cup \{0\})$。

一樣考慮 (O, d)，使得 $(O, d) \in A$，由前面的經驗可知，若

1. $d \in Q$，上下延伸時，邊界上會有 (q, y^{+}) 點。
2. $d \notin Q$，上下延伸時，邊界上會有 $(\sim q, y^{-})$ 點。

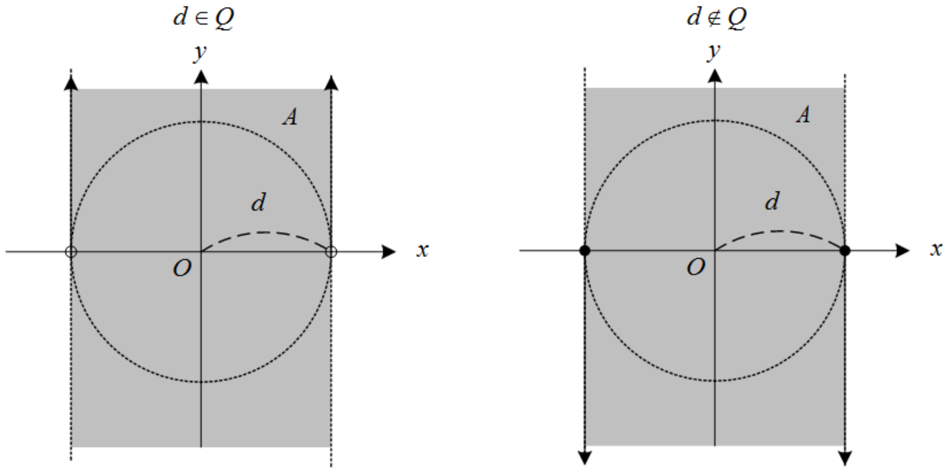

圖 2

換言之，$(-d, d) \times R$ 是不夠大去取代 A 的，不管 d 是多少都是如此，因此 $A = R^2$，B 只好是空集合，做不成「 切開 」，那就是連通囉！

3. 線連通嗎？

既然 $Q \times R^{+} \cup \overline{Q} \times (R^{-} \cup \{0\})$ 是連通的，接下來我們看看它是不是「 線連通 」。

在 x 軸上任意找兩個相異點 $(b_1, 0), (b_2, 0)(b_1 < b_2)$，顯然 b_1, b_2 都是無理數，如果將它們之間接上一條曲線，這一條曲線必然會與所有的鉛直線 $y = k$ $(b_1 < k < b_2)$ 有交點。如此，不管是在 x 軸的上方或者是 x 軸上，或者是 x 軸的下方，都會出現破洞，於是，「 非線連通 」是很顯然的。

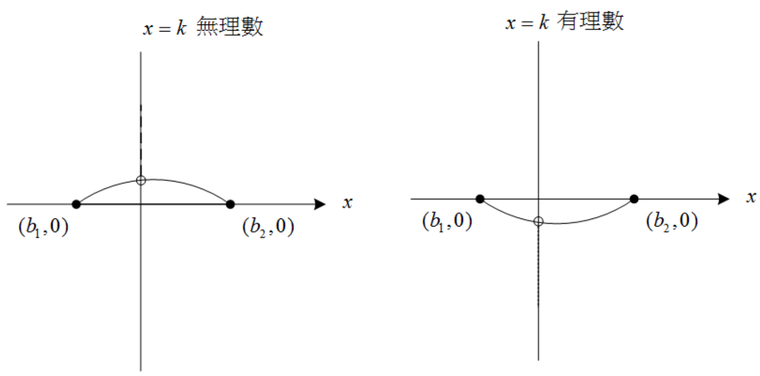

圖 3

4. 補充說明

在上面的說明中，我利用了如果 A, B 是一個集合 S 的分割方法，則 A, B 的邊界上，不應該有 S 上的點。即

定理 **1.** 若 A, B 皆爲 *open set*，$A \cap B = \varnothing$，且 $S \subset A \cap B$，則 $S \cap (bdA \cup bdB) = \varnothing$。

這道理很直觀：如果 A, B 是 S 的一個「切開法」，那麼顯然 $A, C = R^2 - clA = R^2 - bdA - A$ 也是 S 的一個「切開法」，即 $S \cap bdA = \varnothing$。因爲 C 就是 A^c 中最大的開集合，即 $B \subset C$。若 $S \subset bdA \neq \varnothing$，即 A, C 無法切開 S，當然 A, B 也切不開 S。

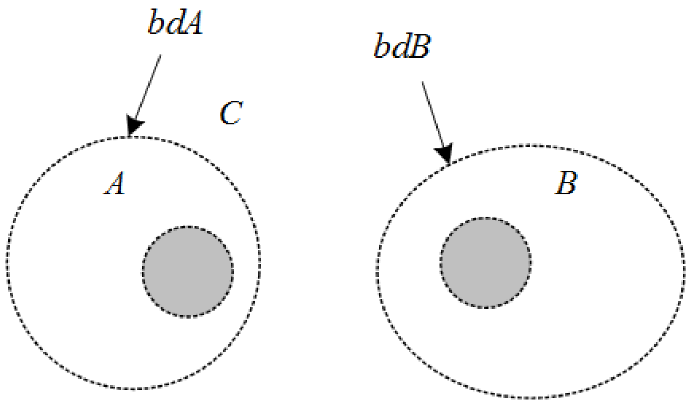

圖 4

5. 上面的說法嚴密嗎？

我在 Apostal 書上看到有其他定理，但是沒有時間細看，應該有用，嗯！

也許你覺得不嚴密！但是我認爲這是建構者的原始想法，妙極！

數學是說理的東西，證明的目的在於理解，你覺得呢？

加油！細細思索，時間不是問題！