海龍公式

bee*

105.08.12 ∼ 105.08.30

sss 面積公式。

1. 海龍公式初看

給一個三角形的三邊長，我們可以計算出這個三角形的面積來嗎？或者更好一點，可以有公式呢？答案是有的：那就是海龍公式。

$\boxed{\text{海龍公式}}$：設 ΔABC 的三邊長分別爲 a, b, c，且 $s = \dfrac{a+b+c}{2}$，

則 $\Delta ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$。

在開始證明這一個公式之前，我們先再看看這一個公式：

$$\Delta ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \tag{1}$$

想想看，這一個公式是不是怪怪的，爲何無緣無故的多了個 s ，公式不是應該長成

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}$$

比較合理嗎？

利用單位的觀點來看，一個式子要對，單位要先正確，而 $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}$ 的單位爲 (公分)$^{\frac{3}{2}}$，顯然是不對的，式子 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ 的單位才合理，所以就單位而言，(1)的公式確實較好。不過，這一個式子還是怪怪的，是不是應該長成

$$\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

比較合理呢？

但是三角形只有三個邊長，公式怎可能變成 $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ 呢？

*bee 美麗之家: http://www.beehome.idv.tw

答案是：它其實是圓內接四邊形的面積公式 (哇！是不是很棒呢？)。

$\boxed{\text{海龍公式}}$：設圓內接四邊形 $ABCD$ 的四邊長分別爲 a,b,c,d，且 $s=\dfrac{a+b+c+d}{2}$，
則 $ABCD$ 的面積爲 $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$。

關於公式 $\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$，當一邊長爲 0 時，如 $d=0$，那麼公式就變成了 $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，這眞是令人驚奇的好結果！如圖 1 所示：

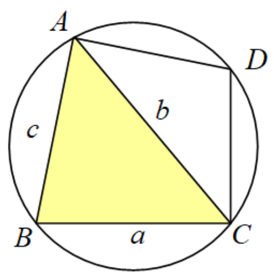

圖 1

2.　證明海龍公式

現在我們開始來證明海龍公式，先看圖 2：

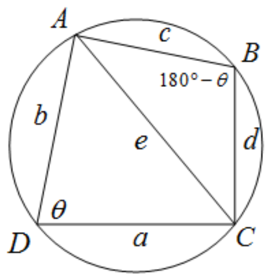

圖 2

四邊形 $ABCD$ 的面積爲

$$\frac{ab}{2}\sin\theta+\frac{cd}{2}\sin(180^\circ-\theta)=\left(\frac{ab+cd}{2}\right)\sin\theta, \tag{2}$$

現在的目標是抓到 $\sin\theta$。

利用餘弦定理，可得：

$$\begin{aligned} e^2&=a^2+b^2-2ab\cos\theta\\ &=c^2+d^2-2cd\cos(180^\circ-\theta)=c^2+d^2+2cd\cos\theta \end{aligned} \tag{3}$$

即 $a^2+b^2-c^2-d^2=2(ab+cd)\cos\theta$，可把 $\cos\theta$ 整理出來爲

$$\cos\theta=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)} \tag{4}$$

這可以說是圓內接四邊形的 $ssss$ 型的餘弦定理。

因爲 $\sin\theta^2+\cos\theta^2=1$，於是，$ABCD$ 的面積就可以變成

$$\left(\frac{ab+cd}{2}\right)\sin\theta=\left(\frac{ab+cd}{2}\right)\sqrt{1-\cos^2\theta} \tag{5}$$

接下來把 $\cos\theta=\dfrac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$ 代入 (5) 中，可得

$$\begin{aligned}
\left(\frac{ab+cd}{2}\right)\sin\theta&=\left(\frac{ab+cd}{2}\right)\sqrt{1-\cos^2\theta}=\left(\frac{ab+cd}{2}\right)\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}\right)^2}\\
&=\frac{1}{4}\sqrt{(2ab+2cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}\\
&=\frac{1}{4}\sqrt{(2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2)(2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2)}\\
&=\frac{1}{4}\sqrt{[(c+d)^2-(a-b)^2][(a+b)^2-(c-d)^2]}\\
&=\frac{1}{4}\sqrt{(a+c+d-b)(b+c+d-a)(a+b+c-d)(a+b+d-c)}\\
&=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},\quad s=\frac{a+b+c+d}{2}. \qquad (6)
\end{aligned}$$

證明之前你可能會覺得有點難，證明之後覺得難度還好，這就是理解後和理解前最大的不同。

3. 國中方法證明海龍公式

其實，我們也可以用三角形的面積公式與畢氏定理，得到三角形面積的海龍公式，證明如下：

$\boxed{\text{海龍公式}}$：設 ΔABC 的三邊長分別爲 a,b,c，且 $s=\dfrac{a+b+c}{2}$，
則 $\Delta ABC=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$。

證明：請看圖 3：

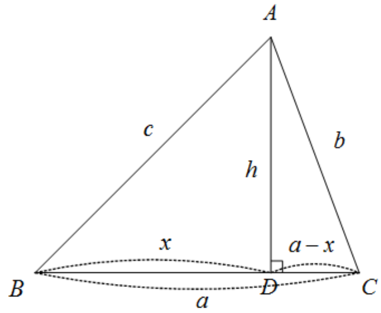

圖 3

(想法是：要得到公式，得抓到高 h，而 h 的關鍵在於 x。)

先如圖 3 畫底邊 a 上的高 h，然後可得兩線段 $\overline{BD}=x, \overline{DC}=a-x$。

觀察兩個三角形 $\Delta ABD, \Delta ACD$，並利用畢氏定理可得：$h=c^2-x^2=b^2-(a-x)^2$，

可解得 $x=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2a}$，然後代入

$$\Delta ABC=\frac{ah}{2}=\frac{a}{2}\sqrt{c^2-x^2}, \tag{7}$$

計算過程爲

$$\begin{aligned}\Delta ABC &= \frac{a}{2}\sqrt{c^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2a}\right)^2}=\frac{1}{4}\sqrt{4a^2c^2-(c^2+a^2-b^2)^2}\\ &=\frac{1}{4}\sqrt{(2ac)^2-(c^2+a^2-b^2)^2}=\frac{1}{4}\sqrt{(2ac+a^2+c^2-b^2)(2ac-a^2-c^2+b^2)}\\ &=\frac{1}{4}\sqrt{[(a+c)^2-b^2][b^2-(a-c)^2]}=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+c-b)(b+a-c)(b+c-a)}\\ &=\sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a+c-b}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\left(\frac{b+c-a}{2}\right)}\\ &=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\end{aligned} \tag{8}$$

對國中學生而言，可能有點難，不過是可以試試看的。

4. 附記

上網查了一下圓內接五邊形的面積公式：發現 1991 年王振和陳計用 Galois 理論證明圓內接五邊形的面積一般不能用邊長的根式表示。滿有意思的！