實數的完備性

bee*

105.10.10

實數的基本性質。

1. 完備公設

實數 (real number) 是研究數學的基本工具，我們可以把實數標示在一條由左往右的水平線上，並將這一條線稱爲實數線。這一條線的最大特色是，它沒有破洞，每一個點表示一個實數，實數點沒有寬度，越往右邊其值越大，也就是說，實數是可以比較大小的 (有 order)。

沒有破洞是一個公設，我們將此公設稱爲「實數的完備公設」。

$\boxed{\text{實數的完備公設}}$：實數線沒有破洞。

2. 完備公設的表示法

數學家用怎樣的方式來表示實數線是沒有破洞的呢？

$\boxed{\text{實數的完備公設}}$：設 A 是實數集 R 的一個子集。若 A 有上界，則 A 在 R 中就可以找到最小上界。

我們稱此公設爲「最小上界公設」。

因爲 R 中是可以比較大小的，所以，上界的意思是：比 A 中所有的元素都大或等於的數。公設的內容是：如果 A 有上界，那麼這些上界中就會有最小的。

這說明聽起來怪怪的，上界中有最小的，不是很自然嗎？難道還會沒有最小的。

看一個例子：

例題 **1.** 在有理數集 Q 中，$A = \{x|x^2 < 2\}$ 是沒有最小上界的。

你可以試試看，還眞找不到一個最小的有理數上界。事實上，最小的上界是 $\sqrt{2}$，這是我們熟知的無理數，在所有比 $\sqrt{2}$ 大的有理數中，我們還眞是找不到最小的。

---

*bee 美麗之家: http://www.beehome.idv.tw

實數線沒有破洞是一個感覺，要用數學的方式表示出來非常困難，上面的完備性敘述，稱爲 Dedekind completeness (Richard Dedekind 1831～1916 德國數學家)，而最小上界性質則是 Bernard Bolzano (1781～1848 Kingdom of Bohemia 波希米亞王國人, 在中歐) 在 1817 年的一篇論文中所介紹的。

$\boxed{\text{定義 1}}$：設 $A \subset R$，若 $\forall a \in A$，$a \leq u$，則我們稱 u 是 A 的一個上界 (upper bound)。又若 u_0 是所有上界中最小的數，則我們稱 u_0 爲最小上界 (least upper bonud)，記爲 $\sup A$ (supremum of A)。同理可以定義最大下界 (greatest lower bound)，記爲 $\inf A$ (infimum of A)。

3. 高中課本寫法

$\boxed{\text{實數的完備公設}}$：若 $\langle a_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ 是一個遞增數列，且 $\langle a_n \rangle$ 有上界，則 $\langle a_n \rangle$ 必然收斂。

我們稱此公設爲「 單調收斂公設 」。

這一個公設和用 sup 表示的最小上界公設是等價的。對於高中生而言，可能這一個寫法比較容易接受，不過，此公設得使用上數列的極限，用 sup 的寫法只要使用基本的 order，比較原始。實質上，這兩個說法是等價的，我們可以證明如下：

$\boxed{\text{證明}}$：

(1) 先由最小下界公設證明單調收斂公設。

設 $A = \langle a_n \rangle_{n=1}^{\infty}$，因爲 $\langle a_n \rangle$ 有上界，所以 A 有最小上界。設此最小上界爲 a，我們要證明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$。

任給一個正數 ε。因爲 a 是最小上界，所以 $a - \varepsilon$ 不是上界，也就是說可以找到一個 k，使得 $a_k > a - \varepsilon$。又因爲 $\langle a_n \rangle$ 是遞增數列，所以所有大於 k 的 n，數列的項 $a_n \geq a_k$，這也就說明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$。

(2) 反過來由單調收斂公設來證明最小下界公設。(我們保留這個證明當習題。讀者自行想想看！)

4. 阿基米德原理

接下來我們談一個很基本且重要的性質：阿基米德原理。

$\boxed{\text{阿基米德原理}}$：對於任意正數 a，我們可以找到一個正整數 n，使得 $n > a$。

這一個原理 (或者稱爲性質) 是很自然的，想想看，我們需要證明它是正確的嗎？

阿基米德原理的基本道理是說：正整數集合 N 是沒有上界的。所以 $\cdots$

如果 N 有上界，那麼根據實數的完備性，N 必然有最小上界，我們將其最小上界用 $b=\sup N$ 表示。

因爲 b 是最小上界，所以 $b-1$ 必然不是 N 的上界，也就是說可以找到正整數 n 使得 $n>b-1$，那麼 $n+1>b$，這樣怪怪的，因爲 b 是上界，但是竟然可以找到正整數 $n+1>b$，這是一個矛盾的現象。因此，N 是沒有上界的，也就是說，對於任何一個正數 a，我們都可以找到一個正整數 $n>a$。

其實，對於高中同學而言，阿基米德原理只要能感受到就好，是不需要證明的。同時，我們不禁想問一個問題：可以由阿基米德原理推得實數的完備公設嗎？

5. 阿基米德原理的等價性質

阿基米德原理的等價敍述：

(1) 對於任意正數 a，我們可以找到一個正整數 n，使得 $n>a$。

(2) 對於任意正數 a，我們可以找到一個正有理數 $\frac{n}{m}$，使得 $\frac{n}{m}>a$。

(3) 對於任意正數 a，我們可以找到一個正整數 n，使得 $\frac{1}{n}<a$。

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$。

上面四個敍述的意義是：

(1)(2) N 與 Q 都沒有上界。 (3)(4) $\frac{1}{n}$ 可以任意接近 0。

阿基米德原理是非常好用的性質，我們可以使用它來證明「有理數的稠密性」。

6. 有理數的稠密性

想一下：啥是有理數的稠密性？高中課本是這樣寫的：

$\boxed{\text{有理數的稠密性}}$：若兩個有理數 a,b 滿足 $a<b$，則我們可以找到一個有理數 c，使得

$$a<c<b$$

(c 最簡單的找法是 $c=\frac{a+b}{2}$)。

證明稠密性的方法很簡單，就是算術平均數，問題是：爲何這樣就是稠密性呢？到底稠密性的意義爲何？其實，有理數的稠密性也可以寫成：

$\boxed{\text{有理數的稠密性}}$：若兩個實數 a, b 滿足 $a < b$，則我們可以找到一個有理數 c，使得 $a < c < b$。

這裡有兩個問題：

(1) 爲何上面的敍述稱爲「 有理數 」的「 稠密性 」?

(2) 怎樣證明「 有理數的稠密性 」成立。

(2) 的證明可以用「 阿基米德原理 」幫忙，這是很棒的一個練習題，留給讀者自己試試看。至於 (1)，表示任意實數的旁邊，都可以找到有理數，眞是稠密 (是嗎？)。

如果我們把有理數的稠密性再改敍述爲：

$\boxed{\text{有理數的稠密性}}$：對於任意一個實數 a，若 $\varepsilon > 0$，則區間 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 內必有「 有理數 」。

這樣的敍述是不是更有意思呢？

7. 為何需要有理數的稠密性

最後，我們來想想看，爲何需要有理數的稠密性呢 (爲何不談無理數的稠密性呢？或者是實數的稠密性呢？)？

有理數是我們喜歡的數，原因是，有理數好掌握，我們對於無理數就覺得很棘手。不過因爲有有理數的稠密性，所以我們可以用有理數來替代或估算無理數，或者是用有規律的無窮有理數列來「 逼近無理數 」。

不過，究竟怎樣逼近或估計一個無理數，這是困難的技術，例如：要估計 π 就是很困難的事情。

8. 補充習題

習題 **1.** 怎樣可以得到 $\sqrt{2}$ 的近似值。

習題 **2.** 怎樣可以得到 π 的近似值。

習題 **3.** 敍述並證明無理數的稠密性。

習題 **4.** 「 知道無理數有稠密性 」這件事情很重要嗎？

習題 **5.** 阿基米德原理和實數的完備公設是否等價？

習題 **6.** 完成「 由單調收斂公設來證明最小下界公設。」

習題 **7.** 證明 $A = \{x|x^2 < 2\}$ 在 R 中沒有最小上界。

習題 **8.** 寫出最小上界的定義。

習題 **9.** 用阿基米德原理證明有理數的稠密性：若兩個實數 a, b 滿足 $a < b$，則我們可以找到一個有理數 c，使得 $a < c < b$。

習題 **10.** 用阿基米德原理證明有理數的稠密性：對於任意一個實數 a，若 $\varepsilon > 0$，則區間 $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ 內必有「有理數」。

9. 參考資料

1. Fred H. Croom, Principles of Topology