和角公式

bee*

105.10.12 ∼ 105.10.31

用內積來表達和角公式，妙哉！

1. 簡單敘述內積

設 $\overrightarrow{a}=(a_1,a_2),\overrightarrow{b}=(b_1,b_2)$，則我們有兩個很重要的結論 (如圖 1 所示)：

(1) $\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2$，

(2) $\left|\begin{matrix}\overrightarrow{a}\\ \overrightarrow{b}\end{matrix}\right|=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\theta=\left|\begin{matrix}a_1&a_2\\ b_1&b_2\end{matrix}\right|$ ($\overrightarrow{a}$ 逆時針轉到 $\overrightarrow{b}$) $=a_1b_2-a_2b_1$。

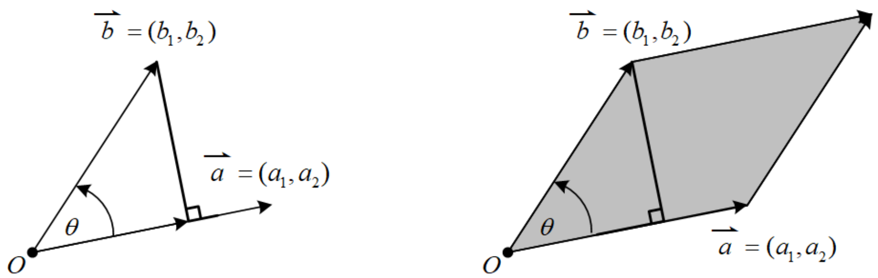

圖 1

2. 基本和角公式 $\cos(\alpha-\beta),\sin(\alpha-\beta)$

因為 $(\cos\theta,\sin\theta)$ 表示單位圓上的點坐標，所以我們可以取兩個向量 $\overrightarrow{a}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$, $\overrightarrow{b}=(\cos\beta,\sin\beta)$，如圖 2 所示：

*bee 美麗之家: http://www.beehome.idv.tw

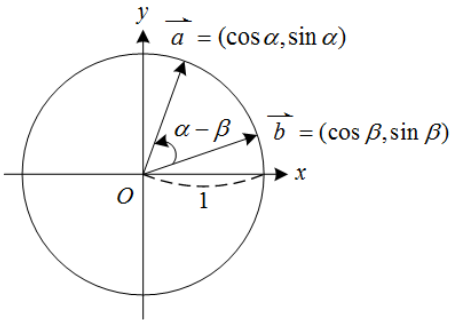

圖 2

將兩向量做內積得：$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=1\times1\times\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$。立即可得

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \tag{1}$$

再計算由 $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ 所張出之平行四邊形面積，得：

$$\left|\begin{array}{c}\overrightarrow{b}\\ \overrightarrow{a}\end{array}\right|=1\times1\times\sin(\alpha-\beta)=\begin{vmatrix}\cos\beta & \sin\beta\\ \cos\alpha & \sin\alpha\end{vmatrix}=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$$，立即可得

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha \tag{2}$$

3. 進階和角公式 $\tan(\alpha-\beta)$

想一下，我們也可以得到 $\tan(\alpha-\beta)$ 的公式嗎？

綜合內積與平行四邊形面積的公式，我們可以利用兩個向量 $\overrightarrow{c}=(1,\tan\alpha),\overrightarrow{d}=(1,\tan\beta)$ 得到 $\tan(\alpha-\beta)$ 的公式，如圖 3 所示：

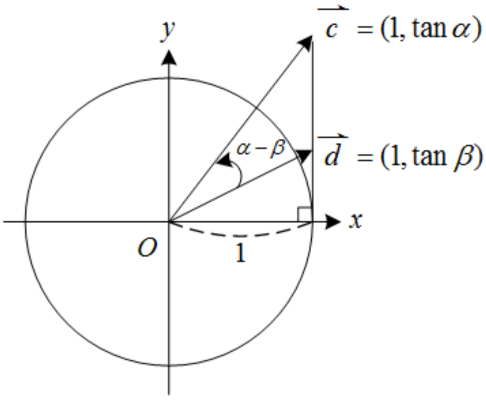

圖 3

計算

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha-\beta) &= \frac{|\overrightarrow{c}||\overrightarrow{d}|\sin(\alpha-\beta)}{|\overrightarrow{c}||\overrightarrow{d}|\cos(\alpha-\beta)} \\
&= \frac{\begin{vmatrix} \overrightarrow{d} \\ \overrightarrow{c} \end{vmatrix}}{\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d}} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \tan\beta \\ 1 & \tan\alpha \end{vmatrix}}{(1,\tan\alpha)\cdot(1,\tan\beta)} \\
&= \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}
\end{aligned}$$

立即可得

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} \tag{3}$$

4. 和角公式 $\tan(\alpha-\beta)$ 的幾何意義

雖然我們已經證明三個差角公式，但是感覺上並不令人滿意，因爲幾何意義並不明確，那麼，究竟幾何意義爲何呢？

我們利用「基底」的概念再看一次差角公式。

看圖 4，我們將 $\overrightarrow{d}$ 與 $\overrightarrow{d^\perp}$ 當作基底 (其實也就是兩個互相垂直的坐標軸，而且 $\overrightarrow{d^\perp}$ 是由 $\overrightarrow{d}$ 逆時針旋轉 90° 來的)，那麼 $\tan(\alpha-\beta)$ 就是「$\overrightarrow{c}$ 在 $\overrightarrow{d^\perp}$ 上與在 $\overrightarrow{d}$ 上之投影量的比」。

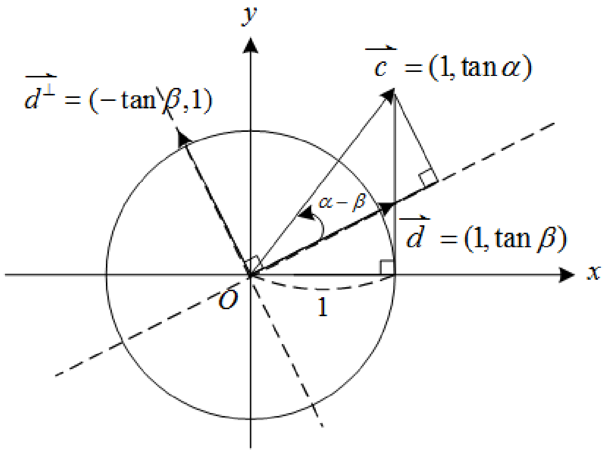

圖 4

那麼該怎樣計算這兩個投影量的比呢？內積是最棒的工具：

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d^{\perp}}}{\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d}}=\frac{\begin{vmatrix}\overrightarrow{d}\\ \overrightarrow{c}\end{vmatrix}}{\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d}} \tag{4}$$

當然，讀者會問一個問題：怎樣能得到 $\overrightarrow{d}^{\perp}$ 呢？又怎會扯上二階行列式呢？

這裡很美妙的狀況就是：二階行列式其實就是內積，透過內積我們可以計算面積，而 $\overrightarrow{d}^{\perp}$ 究竟該怎樣跑出來呢？留給讀者去思考一下。

5. 總結與習題

總結：

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{\frac{\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d^{\perp}}}{|\overrightarrow{c}|\cdot|\overrightarrow{d}^{\perp}|}}{\frac{\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d}}{|\overrightarrow{c}|\cdot|\overrightarrow{d}|}}=\frac{\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d^{\perp}}}{\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d}}=\frac{\begin{vmatrix}\overrightarrow{d}\\ \overrightarrow{c}\end{vmatrix}}{\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d}} \tag{5}$$

習題：爲何 $\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{d^{\perp}}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{d}\\ \overrightarrow{c}\end{vmatrix}$?