泰勒展開式

bee*

108.04.01 $\sim$ 108.04.01

微分的終極表現！[1]

1. 均值定理

$\boxed{\text{均值定理}}$：設 $f(x)$ 是 C^1 函數 (即 f 是連續可微函數)。則

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(c) \tag{1}$$

或

$$f(x)=f(a)+f'(c)(x-a) \tag{2}$$

或

$$r_0(x)=f(x)-f(a)=f'(c)(x-a) \tag{3}$$

其中 $c\in(a,x)$。如圖 1 所示：

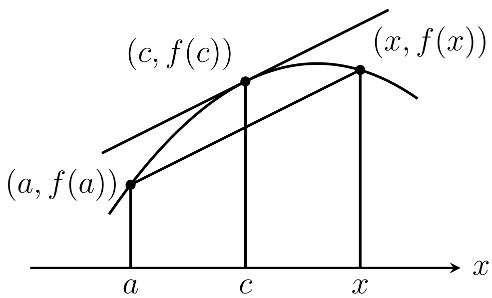

圖 1

上面的 c 是跟著 x 動的，換言之，c 不是一個常數，是 x 的函數 $c(x)$。

試著說明：均值定理的意義是甚麼？

---

*bee 美麗之家: http://www.beehome.idv.tw

[1] 112 年元月編修，圖改用 Tikz 繪製。文中錯誤感謝學弟林老師來函，本文不夠精緻處，再找時間修正。

2. 均值定理的意義

$\boxed{\text{意義一}}$：平均變化率會和某一點的瞬間變化率一樣。

這樣的點不一定只有一個，但是一定【至少】有一點。這可以稍微體會一下。例如：如果平均速度是每小時 60 公里，那全程的瞬間速度就不會【都大於】60 公里或【都小於】60 公里，因爲函數本身是連續可微函數，所以每次由大於轉成小於，或由小於轉成大於時，就會產生一次【瞬間速度等於平均速度】的點。

$\boxed{\text{意義二}}$：$f(x)$ 的函數值，可以用在 $x=a$ 之位置的資料來估計。

那究竟是怎樣估計的呢？最簡單的辦法就是用 $f(a)$ 來估計。這看起來有點【粗糙】，我們在後面的內容再舉例說明。

$\boxed{\text{意義三}}$：用 $f(a)$ 來估計函數值 $f(x)$，會產生的誤差不會太大，且和 $x-a$ 的值有密切的關係。

我們把 $r_0(x)$ 稱爲餘項，也就是誤差項，這一個誤差項就是 $f'(c)(x-a)$。如果 $f'(c)$ 不會太大，那麼只要控制 $x-a$ 的值，就可以控制估計的誤差。

上面的討論都有值得深入的地方，我們需要一個例子來說明。

3. 零次近似與估計範例

我們有底下的定義：

- $f(a)$ 稱爲 $f(x)$ 在 $x=a$ 的【零次近似】，記爲 $p_0(x)=f(a)$。
- $r_0(x)=f'(c)(x-a)$ ，稱其爲【零次餘項】或【零次誤差】。

看一個例子：

例子：設 $f(x)=\sqrt[3]{x}$。用零次近似估計 $\sqrt[3]{9}$ 的值，並說明你的估計值的誤差範圍。

作法：先找一個完全立方數 8，因爲 8 很靠近 9，且 $\sqrt[3]{8}$=2，所以 $\sqrt[3]{9}$ 的零次近似爲 $p_0(8)=2$。

觀察 2 顯然比 $\sqrt[3]{9}$ 來得小，現在我們問一個問題：2 比 $\sqrt[3]{9}$ 小多少？

計算 $f'(x)=\dfrac{1}{3}x^{\frac{-2}{3}}=\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$，因此可得 $f'(8)=\dfrac{1}{12}$，於是，我們猜測誤差不會超過

$$f'(8)(9-8)=\frac{1}{12}<0.1 \tag{4}$$

但是，猜測是正確的嗎？

這時候，我們需要畫出 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在 $x=8$ 附近的圖形。如圖 2 所示：

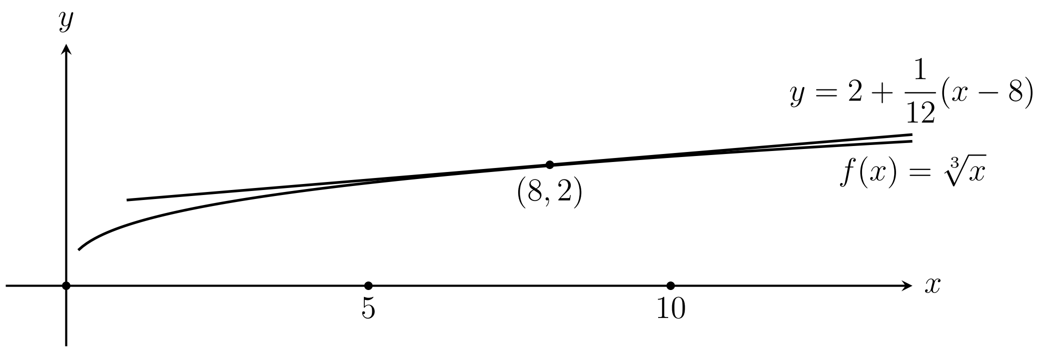

圖 2

我們發現在 $(8, 2)$ 附近，圖形的開口向下，因此，當 $x > 8$ 時，函數增加的速度小於 $\frac{1}{12}$，這也說明誤差值事實上是小於 $\frac{1}{12}$ 的。

計算 $\frac{1}{12} \approx 0.0833$，因此可估計 $\sqrt[3]{9} = 2.08$，計算一下 $2.08^3 = 8.998912$，已經非常接近 9。事實上 $\sqrt[3]{9} = 2.0800838\cdots$。

物理學家費曼在他的書中提到，和一位日本珠算家比賽開立方的問題，題目是求 $\sqrt[3]{1729.03}$ 的值。因爲 $1728 = 12^3$，所以如果使用零次近似加上最大誤差，即

$$\sqrt[3]{1729.03} \approx 12 + \frac{1}{3\times 144}(1729.03 - 1728) = 12.00238\cdots \tag{5}$$

上面的計算就是簡單的除法，零次近似本來是 12，但是因爲誤差應該小於 $\frac{1}{432}$，所以大膽的加上誤差，費曼說 $\sqrt[3]{1729.03} = 12.002\cdots$。

事實上 $\sqrt[3]{1729.03} = 12.00238378\cdots$，嚇人的準。

會很準的原因是：1729.03 和 1728 實在是太靠近了，如果拉遠一點會怎樣？我們用同樣的方法來估計 $\sqrt[3]{1740}$。

利用零次近似和最大誤差得

$$\sqrt[3]{1740} = 12 + \frac{1}{432}(1740 - 1728) = 12 + \frac{1}{36} = 12.0277\cdots$$

事實上，$\sqrt[3]{1740} = 12.027713\cdots$，依然很準。

於是，我們把零次近似提升爲一次近似，即

$$f(a) \to f(a) + f'(a)(x-a) \tag{6}$$

但是，我們得試著了解 $f(a) + f'(a)(x-a)$ 和 $f(x)$ 的誤差範圍。

4. 一次近似

根據前面的討論，我們設

$\boxed{\text{一次近似多項式}}$：$p_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ 爲 $f(x)$ 的一次近似多項式。

$\boxed{\text{一次餘項}}$：$r_1(x) = f(x) - p_1(x)$ 爲 $f(x)$ 的一次餘項。

我們想知道一次餘項該如何估計？

在估計之前，我們先確定 f 是一個不錯的函數，即先設定它是一個 C^2 函數，這樣子可以保證它在二次微分後依然連續。

因爲 $r_1(x) = f(x) - p_1(x)$，而 $p_1(x)$ 是一個可愛的多項式函數，所以 r_1 也是 C^2 函數。同時，

$$r_1(a) = r_1'(a) = 0, \quad r_1''(a) = f''(a) \tag{7}$$

這說明 $r_1(x)$ 的樣子應該【 可以很簡單 】?!

老實說，我們應該先猜猜看 $r_1(x)$ 的樣子！(這裡可以先自己試試看囉！)

因爲 $r_1(x)$ 是 C^2 函數，所以利用均值定理我們有

$$r_1''(c) = \frac{r_1'(x) - r_1'(a)}{x-a} \Rightarrow r_1'(x) = r_1'(a) + f''(c)(x-a) = r_1''(c)(x-a) \tag{8}$$

然後【 作反導 】得

$$r_1(x) = \frac{f''(c)}{2}(x-a)^2 + k \Rightarrow r_1(x) = \frac{f''(c)}{2}(x-a)^2 \tag{9}$$

因爲 $r_1(a) = 0$，所以上式中 $k = 0$，於是，$r_1(x)$ 有一個非常簡單的樣子：

$$r_1(x) = \frac{f''(c)}{2}(x-a)^2$$

當然式子中的 c 依然是一個 x 的函數 $c(x)$。

於是我們有

- 【 一次近似 】$p_1(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$。
- 【 一次餘項 】$r_1(x) = \dfrac{f''(c)}{2}(x-a)^2$。
  因此 $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{f''(c)}{2}(x-a)^2$
- 【 二次近似 】$p_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{f''(a)}{2}(x-a)^2$。

猜猜看 :【 二次餘項 】的長相。

5. 二次近似

於是，二次餘項應該定義爲

$$r_2(x) = f(x) - p_2(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) - \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 \tag{10}$$

且

$$r_2(a) = 0 = r_2'(a) = r_2''(a), \quad r_2^{(3)}(a) = f^{(3)}(a) \tag{11}$$

因此利用均值定理，得

$$r_2^{(3)}(c) = \frac{r_2''(x) - r_2''(a)}{x-a} \Rightarrow r_2''(x) = r_2''(a) + r_2^{(3)}(c)(x-a) = f^{(3)}(c)(x-a) \tag{12}$$

於是再利用反導，可得

$$\begin{aligned} r_2'(x) &= \frac{f^{(3)}(c)}{2}(x-a)^2 + k_1 = \frac{f^{(3)}(c)}{2}(x-a)^2 \\ r_2(x) &= \frac{f^{(3)}(c)}{2\times 3}(x-a)^3 + k_2 = \frac{f^{(3)}(c)}{3!}(x-a)^3 \end{aligned} \tag{13}$$

看來，餘項是有規律的，同時，有【二次餘項】，就會有【三次近似】，然後有【三次餘項】等等，你腦中應該出現數學歸納法。所以，只要函數 $f(x)$ 本身的條件夠好，就是可以微分【足夠多階】，那麼近似的作法就可以繼續下去。

6. n 次近似

於是我們有

$\boxed{n \text{ 次的均值定理}}$：設 $f(x)$ 是一個 C^{n+1} 函數，則

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-a)^n \tag{14}$$

其中 c 是 x 的函數。

$\boxed{n \text{ 次近似}}$：$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$。

$\boxed{n \text{ 次餘項}}$：$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$。

因爲 $f^{(n+1)}(x)$ 是連續函數，所以 $f^{(n+1)}(c)$ 是有限的，這時候只要控制 $x-a$ 的值，就可以

讓估計的誤差【 在可控制的範圍內 】。

7. $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 的二次近似

由前面的討論可得 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ 在 $x=8$ 的二次近似多項式爲

$$p_2(x)=\sqrt[3]{8}+\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{8^2}}(x-8)+\frac{-1}{9}x^{\frac{-5}{3}}(x-8)^2=2+\frac{1}{12}(x-8)-\frac{1}{288}(x-8)^2 \tag{15}$$

其圖形如圖 3 所示：

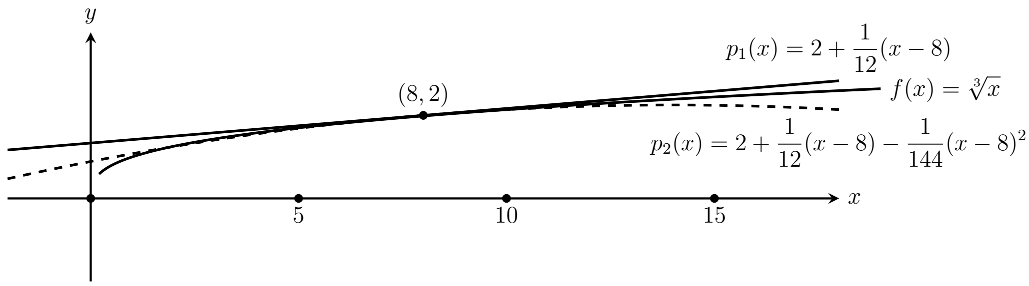

圖 3

二次餘項 $r_3(x)=\dfrac{f^{(3)}(8)}{3!}(x-8)^3=\dfrac{5}{20736}(x-8)^3$，如果是估計 $\sqrt[3]{9}$，得 $p_1(8)=2.079861\cdots$，那誤差不會超過 $\dfrac{5}{20736}\approx 0.000241$，近似的效果看起來眞不錯。

實際上 $\sqrt[3]{9}=2.080083823\cdots$。

如果用 $a=2.1^3=9.261$ 來估計會怎樣？

計算

$$p_2(x)=2.1+\frac{1}{3}\frac{1}{4.41}(x-9.261)+\frac{-1}{9}\frac{1}{40.84101}(x-9.261)^2$$

$$r_2(x)=\frac{5}{27}\cdot\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2.1^8}(x-9.261)^3=\frac{5}{61273.03}(x-9.261)^3$$

於是把 9 代進去，得 $p_2(9)=2.080086780420$，$r_2(9)=-0.00000145085$。

你如果仔細看，會發現我的計算不是很準。老實說，9.261 也不是很吸引人，原因就是不好算，所以要利用近似估計，其實需要計算機，需要會寫程式的工程師。在這裡，我們只是說明數學原理很有用而已。

實際上程式該如何寫，我根本不會，有興趣的讀者再自行尋求其他資源。

8. 泰勒展開式

經由上面的討論，我們知道可以用一個 n 式多項式去【趨近】一個 C^n 函數，因爲餘項是

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{16}$$

所以，當 n 越來越大時，只要將 x 靠近 a，那餘項的值就會很小。又如果 f 是 C^∞ 函數，我們就可以將多項式的項數一直增多下去，這樣，函數 f 就變成無窮多項的多項式，這一個級數就稱爲【泰勒級數】。

例如：

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$ 。
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$

一個函數如果可以寫成泰勒級數的樣子，那麼這一個函數就稱爲【解析函數】，這是條件最好的函數。

對於 C^∞ 函數 f，在 $x = a$ 處的泰勒級數形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)(a)}}{n!}(x-a)^n \tag{17}$$

當 $a = 0$ 時，我們則稱此級數爲麥克勞林級數。

泰勒 (1685∼1731，英國人) 在 1715 年發表泰勒級數，拉格朗日在 1797 年提出泰勒多項式的餘項，泰勒展開式定理則由柯西完成證明。麥克勞林 (1698∼1746，英國蘇格蘭人) 和泰勒合稱【級數雙星】，在代數上它提出用行列式解答聯立方程組，就是克拉瑪公式，在級數上就是泰勒級數在 $x = 0$ 處的特殊情形。

9. 後記

我們將另寫一篇文章介紹各種基本函數的泰勒展開式，還有一篇介紹與泰勒展開式有關的 Bessel equations。