勒貝格測度

bee*

110.10.21

一個度量實數軸上子集合之長度的好方法。[1]

1. 想一個問題

$\boxed{\text{問題}}$：給一個實數軸上的子集合 E，我們該怎樣量測它的長度呢？

根據我們既有的概念，這問題應該不難，只是需要一把尺吧！不過，當我們眞的認眞分析下去，才發現這問題還眞是不簡單！

2. 測量的基本原則

底下我們要討論的是，實數軸 R 上子集合 E 的長度。我們可以想像長度 l 是一個函數

$$l(E) : 2^{\mathrm{R}} \to \mathrm{R}^{+} \cup \{0\}$$

其中，2^{R} 是 R 的冪集合 (power set)[2]，即 $E \subset \mathrm{R}$。

我們希望

(1) 長度計算法：關於閉區間 $E = [a, b]$，$l(E) = b - a$。

(2) 有限相加性：若 $E_1 \cap E_2 = \varnothing$，則 $l(E_1 \cup E_2) = l(E_1) + l(E_2)$。

(3) 平移不變性：$l(E + x) = l(E)$。

想一下：上面的 3 個原則是啥意思呢？

---

*bee 美麗之家: http://www.beehome.idv.tw

[1]110.10.26 修正第二版。

[2]就是所有 E 所形成的集合。

3. 理解原則

$\boxed{\text{原則 1}}$：閉區間的長度是【 右端點減去左端點 】，合乎常理，這是量尺的基本原則。

如果只是一個單點，即 $E=[a,a]$，則 $l(\{a\})=a-a=0$。有了這一個結論，則任意型態之區間的長度都可以用【 右端點減去左端點 】來計算。即

$$l\big((a,b)\big)=l\big([a,b)\big)=l\big((a,b]\big)=l\big([a,b]\big)=b-a$$

$\boxed{\text{原則 2}}$：長度累加。

這原則也很自然，只要兩集合沒有重疊部分，當然是集合增加多少，長度就增加多少。

$\boxed{\text{原則 3}}$：平移後保持長度。

$E+x$ 表示將 E 中的元素都平移 x 單位後所形成的集合。

當集合 E 整個平移 x 後，集合 $E+x$ 除了位置與 E 之不同之外，和原集合 E 的大小是一樣的，當然長度也就應該一樣。

上面 3 個原則都很基本，理解後應該也沒有啥問題。接下來，我們要問一個重要的問題：

$\boxed{\text{關鍵問題}}$：是否 R 中的任意子集合 E 都可以被測量呢？數學上的問法是 $l(E)$ 有意義嗎？

4. 關鍵問題的來源

既然我們都認爲 3 個原則都是合理的，爲何會產生關鍵問題呢？這是實數軸上無比有趣的地方。

數學史上曾認爲數線上只要【 有理數 】就足夠表示每一個點，同時，有理數有【 稠密性 】，即不管多小的區間內，都有無限多個有理數。既然有理數有這樣多，那麼，設 $E=[0,1]\cap\mathrm{Q}$，其長度

$$l(E)=\ ?$$

這裡的困難度與有趣性是：無窮多點的集合該如何量測其長度呢？

我們先提出一個預備知識：

$\boxed{\text{預備知識}}$：Q 的元素個數是【可數的 (countable)】[3]。

可數的意思是：每一個有理數都可以用【正整數】來編號。

這一個預備知識對我們來說，看起來毫無助益。其實【可數性】是某一類有無限多元素的集合，因爲其元素有無限多個，這讓我們對於有無限多個元素之集合的長度是多少，產生興趣。

根據原則 2 之長度相加性，我們有【有限相加性】，即

設 $\{E_n\}_{n=1}^{m}$ 滿足 $E_i \cap E_j = \varnothing$，其中 $i \neq j$，我們有

$$l\left(\bigcup_{n=1}^{m} E_n\right) = \sum_{n=1}^{m} l(E_n)$$

因爲單點的長度是 0，所以我們是否可以由有限多個集合長度的有限相加性，推廣成可數多個集合長度的相加性。即

設 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ 滿足 $E_i \cap E_j = \varnothing$，其中 $i \neq j$，是否

$$l\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} l(E_n)$$

我們把這樣的性質稱爲【可數相加性】。

關於可數相加性是否應該成立，需要我們去感覺、去理解與做選擇。讀者不妨停在這裡想一下。

如果不考慮現實情形，關於 $E = [0,1] \cap \mathrm{Q}$，我們有兩種可能的選擇：

(1) $l(E) = 0$

(2) $l(E) = \epsilon > 0$

如果我們選擇 $l(E) = 0$，一下子之間不會發現問題，而且，因爲單點的長度是 0，又 E 中的元素是可數多個，利用可數相加性，顯然 $l(E) = 0$。

這說明，當我們選擇 $l(E) = 0$ 時，可數相加性是被允許的 (爲什麼？)。

如果我們選擇 $l(E) = \epsilon > 0$，那麼依據阿基米德原理，$l(E)$ 會大於某一個正整數 n 的倒數，即

$$l(E) > \frac{1}{n}$$

這樣會不會有問題呢？

[3] 我們再寫篇文章來介紹。

5. 可數集合的長度是 0

如果接受 $l(E) > \dfrac{1}{n}$，那麼我們會發現一個詭異的現象，作法如下。

因爲 E 是 $[0,1]$ 裡的一個子集合，我們利用 E 創造另一個集合 $E_{\sqrt{2}}$：

$$E_{\sqrt{2}} = [0,1] \cap \left(\mathrm{Q} + \sqrt{2}\right)$$

我們可以檢查一下：$E \cap E_{\sqrt{2}} = \varnothing$[4]。不僅如此，$l(E) = l\left(E_{\sqrt{2}}\right)$。

如法炮製，再製造 $E_{\sqrt{3}}$，$\cdots$，我們把所有的無理數都拿來試一試。

想一下：如果 a 是無理數，我們可以創造多少個 E_a 呢？答案是 :【 不可數多個 】。

在每本數學分析的教科書之第一章，都會介紹可數和不可數這兩個概念。意思是：無限多分成兩種，一種是個數比較少的【 可數多 】，一種是個數比較多的【 不可數多 】。我們可以證明 $[0,1]$ 中的有理數個數是可數多，而 $[0,1]$ 中的無理數個數是不可數多，因此，無理數是比有理數多。

於是區間 $[0,1]$ 可以變成 E 和所有 E_a 的聯集，這些集合群內的集合，有不可數多個，而且任兩個都【 沒有交集 】，如圖 1 所示：

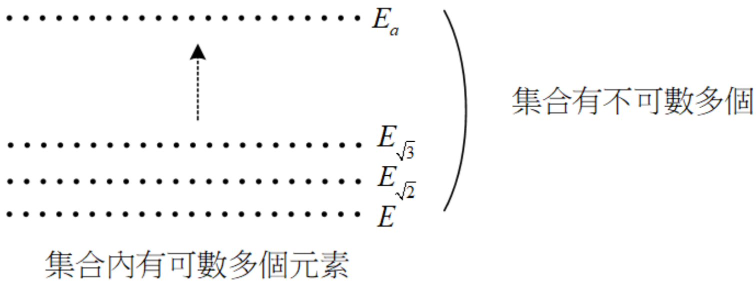

圖 1

這樣我們把 $[0,1]$ 硬生生拆開成不可數多個可數集合的【 無交集集合的聯集 】，數學上稱這是一個【 分割 】。因爲不可數是一種無限多，所以如果讓 $l(E) = \dfrac{1}{n}$，那麼，

$$l\left([0,1]\right) = \frac{1}{n} \times \infty = \infty > 1$$

出現矛盾的結論，這說明讓 $l(E) > 0$ 是一個錯誤的選擇。即當 E 是一個可數集合時，$l(E) = 0$。

[4]高一常見的考題，眞是爲難高一的同學了

同時，這也說明要量測 $[0,1]$ 中所有的子集合是做不到的。

為什麼呢？

想想看！

6. 一個無法測度的集合

數學家創造一個集合 F_1，做法是從 E, E_a 中每一個集合中選取一個元素來構成 F_1，因為 E, E_a 的個數是不可數多，所以 F_1 裡面的元素是不可數多個。

仿照這樣的方法，我們可以把 $[0,1]$ 分割成【 可數多個 】【 不可數集合的無交集聯集 】，即

$$[0,1] = \dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} F_n$$

聯集符號中多一個點的意思是：$F_n \cap F_m = \varnothing$，其中 $n \neq m$。於是，

$$l(F_n) = ?$$

就變得很困擾啦！

回顧圖 1，你可以想像 $[0,1]$ 被奇怪的拆解成每橫列有【 可數個元素 】，而總共有【 不可數列 】的圖形。於是，即使我們可以假設每一個橫列 (可數集) 的長度是 0，那【 每一直行 】該怎麼辦呢？

同樣有兩種選擇：

(1) $l(F_1) = 0$

(2) $l(F_1) = \epsilon > 0$

我們發現這兩種選擇都不可行。這是一個不錯的習題，留給你啦！

F_1 就是著名的【 不可測度的集合 】，數學上得依賴【 選擇公設 】來建構它。目前我沒有辦法說清楚【 選擇公設 】，所以，只好請讀者直觀理解 (或者自己想辦法弄清楚這公設)。

7. 整理

量測長度的 3 個原則：

(1) 閉區間的長度：設 $E = [a,b]$，則 $l(E) = b - a$。

(2) 可數性相加：$l\left(\dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} l(E_n)$。

(3) 平移性：$l(E+x)=l(E)$。

觀察閉區間 $[0,1]$。我們把區間內所有有理數的長度透過可數性相加設定爲 0，同時也用相加性得 $[0,1]$ 中所有無理數的總長度爲 1。

但是因爲奇怪的分割法，我們有【不可測度的集合】，這實在是因爲【不可數這奇怪的特性】。

8. 不可數集合的長度就大於 0 嗎？

這是啥問題？難道不可數集合也可能長度爲 0 嗎？

9. 康托集合

康托爾[5] (Cantor, 1845∼ 1918，德國數學家) 是現代集合論的創立者。

所謂的康托集合 (Cantor's set) 是將 $[0,1]$ 先分成三等份，然後將中間那一段【開區間】$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ 拿掉。然後如法炮製，再將剩下的那兩段三等份，一樣拿掉中間那一段【開區間】$\left(\frac{1}{9},\frac{2}{9}\right),\left(\frac{7}{9},\frac{8}{9}\right)$，$\cdots$，以此類推，如圖 2 所示：

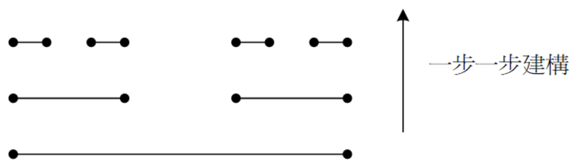

圖 2

所謂的康托集合 C，是 $[0,1]$ 中依序抽掉開區間後剩下的部分。如果我們要計算 C 的長度，很自然地發現：

$$l(C)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\cdots=0$$

這是一個長度爲 0 的集合。但是，集合 C 中有很多點被留下來，究竟那些點被留下來呢？

這時候我們使用三進位制。想一下：留下來的點的坐標長成甚麼樣子呢？

$$x=0.\,a_1\,a_2\,a_3\,a_4\,\cdots$$

其中 a_i 是 0 或者是 2，因爲 1 都被刪掉了，所以不會出現 1。

[5]康托爾的全名好長喔：格奧爾格·費迪南德·路德維希·菲利普·康托爾

有趣的是：我們可以證明這些數是不可數的多 !!! 這很驚人喔！需要一個有趣的證明。想知道證明的讀者，可以參閱我未來的文章：可數與不可數。

換言之，C 是一個長度爲 0 的不可數集合。

在 $[0,1]$ 中拿掉可數集，不會影響其長度，而康托集說明，也有機會拿掉一個不可數集，不影響其長度。這眞是讓我們大開眼界。

10. 勒貝格測度

本文談到測量長度的方法，是法國數學家勒貝格 (Henri Léon Lebesgue，1875 ∼ 1941) 的創見，這測量的方法就稱爲勒貝格測度 (Lebesgue measure)，是一個測量長度的完備方法。

我們熟悉的微積分是建立在區間上，就是黎曼積分，而勒貝格積分是把積分的基礎由區間推廣到【 可測度的集合 】。過往我理解勒貝格積分是黎曼積分的推廣，不過，林琦坤老師的文章提到有黎曼可積但勒貝格不可積的例子。這說明我對於積分理論不是很清楚。

11. 勒貝格定理

有了勒貝格測度，黎曼可積分定理就可以被推廣到勒貝格可積分定理。

$\boxed{\text{勒貝格可積分定理}}$：設函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界, 則 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可以積分的充要條件是: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的不連續點集爲零測度集。

$\boxed{\text{黎曼可積分定理}}$：設函數 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上連續, 則 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是可以黎曼積分的。

我們不在這主題上繼續討論。關於黎曼積分的部分，可以參考我寫過的兩篇介紹文章。

(1) 微積分基本定理：http://www.beehome.idv.tw/paper/1040913.pdf。

(2) 微積分基本定理的證明：http://www.beehome.idv.tw/paper/1111016.pdf。

關於勒貝格定理，可以參考胡紹宗老師的：勒貝格 (Lebesgue) 定理的有趣證明與函數 R 可積性一文。數學傳播 29 卷 2 期。

12. 不可積分的函數 — **Dirichlet** 函數

這裡說的不可積分指的是：不可以黎曼積分。

$\boxed{\text{Dirichlet 函數}}$：設

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in \mathrm{Q} \\ 1 & x \notin \mathrm{Q} \end{cases}$$

這是一個處處不連續的函數。因爲處處不連續，我們沒有辦法用區間積分的方法。

以閉區間 $[0,1]$ 來說，不管我們如何做區間分割，上黎曼和永遠等於 1，下黎曼和永遠等於 0，即上下黎曼和的極限值不會相等，讓我們不知道定積分 $\int_0^1 f(x)dx$ 該選擇何值？

但是如果採用勒貝格測度的方法，因爲有理點的測度是 0，所以 $\int_0^1 f(x)dx$ 的值可以僅在無理點上求積分，於是

$$\int_0^1 f(x)dx = 1 \times l(E) = 1$$

其中 $E = [0,1] \cap \mathrm{Q}^{\mathrm{c}}$。

因爲 R 上的區間都是可以測度 (測量長度) 的，所以在 $[a,b]$ 上可以黎曼積分的函數，都是可以勒貝格積分的，而一些無法黎曼積分的函數 (如 Dirichlet 函數)，我們在不連續點集爲零測度集的情形下，可以得到其積分值，即可勒貝格積分。

想像一下，把 Dirichlet 函數的定義域改成康托集時，依然可以積分。即

$\boxed{\text{康托函數}}$：設

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in C \\ 1 & x \notin C \end{cases}$$

依然有定積分 $\int_0^1 f(x)dx = 1$。

13. $\sigma-$algebra

回顧一下勒貝格測度，不是 2^{R} 中的元素都可以被測度，而在測量時，我們選擇【可數相加性】，於是，測量函數 $l(E)$ 的定義域應該被限制在一個比 2^{R} 還小的範圍，我們把那一個範圍稱爲 $\sigma-$algebra。

我們用符號 $\mathcal{A}$ 表示這一個集合，則

(1) $\mathrm{R} \in \mathcal{A}$。

(2) 若 $E \in \mathcal{A}$，則 $\mathrm{R} - E \in \mathcal{A}$。

(3) 若 $E_1, E_2, \cdots \in \mathcal{A}$，則 $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$。

$\mathcal{A}$ 之所以稱爲 $\sigma-$algebra，其 σ 指的是 $\mathcal{A}$ 擁有【 可數多個聯集 】的特性。

這時候我們要求測量函數 $l(E)$ 滿足 3 個測量原則，把可測量的集合放進 $\mathcal{A}$ 裡面，可得測量函數

$$l(E) : \mathcal{A} \to \mathrm{R}^+ \cup \{0\}$$

14. 後話

我其實是不小心打開大學買的一本課本，我不記得哪一門課用到這本課本，因爲當初系上開的好像是 measure theory，用的是 Robert G. Bartle 的 The Elements of Intergration 一書[6]。我記得都聽不懂 (還是同學也聽不懂？) 測度論的課，後來研究所時分析課用的 Rudin 的 Real and Complex analysis，也就是所謂的【 中 Rudin 】，才對測度理論有點認識。

我翻到的書是 H.L.Royden’s Real Analysis .

在維基百科可以看到作者：小哈爾西·勞倫斯·羅伊登（ Halsey Lawrence Royden Jr. ）是美國數學家，專門從事黎曼曲面，多個複變函式和複雜微分幾何的複變分析。

我覺得【 學數學是一個體會的過程 】，重點不在於做對或做錯，而在於自己對內容體會多少。

我有時候想，如果念大學時，是一個主題一個主題慢慢學習，學習後寫下心得，而且沒有考試，是不是我會學的比較札實，或者說會非常開心呢？

書本的東西一定要被自己改寫，才有機會成爲自己的東西。

現在當老師，非常開心，可以隨意學。我的學生很聰明，我喜歡胡說亂講，而他們也都捧場聆聽。眞是愉快的職涯！

這篇短文算是進入實分析的敲門磚，希望帶給讀者一些樂趣，有興趣的讀者可以找一本實分析的書來研究。

數學家的想法多來自於對某些概念產生問題，因爲思索如何解答問題，而提出可用的建構方法，進而產生堅實的理論。當然，這需要時間和很多數學家的共同努力。

[6] 我翻開這本書，覺得還是很不平易近人 !?