

1 為什麼不該是質數

bee*

111.05.06

或許，我們該先想想，甚麼是質數？

1. 質數

質數，英文名字是 prime number。prime 是甚麼意思呢？prime 有 basic, fundamental 的意思，我喜歡把 prime 稱為原始的，原型。於是，質數是原始數，基礎數的意思，問題是，基於甚麼樣的理由將質數稱為基礎數呢？

翻開各種書籍，幾乎質數的解釋都是：只有 1 和自己兩個因數的正整數就稱為質數。我們稱這一個定義為操作型定義，就是當你要去檢驗一個整數是不是質數時，可以先檢查它的因數，只要恰好有 2 個相異因數，那麼就稱為質數，例如：2,3,5,7, 等。不過，這一個操作型定義並不容易檢查，例如 91, 97 這兩個數是不是質數，我們得花個功夫，發現

$$91 = 7 \times 13, \quad 97 \text{ 真的沒有辦法分解！}$$

才能確定 91 有好多個因數：1,7,13,91，所以不是質數，而 97 因為無法被分解，所以只有 1 和 97 兩個因數，因此是質數。

要判斷一個數是不是質數，不是一件簡單的事情，而當你真的動手去做時，會發現一個數是不是質數的關鍵在於：它能不能被分解，似乎，不能被分解才是質數的根本性質。

於是我們有底下的分類方法：

- 質數：不能被分解的整數。
- 合成數：可以被分解的整數。

*bee 美麗之家: <http://www.beehome.idv.tw>

所以，質數是整數在乘法世界中，不能被分解的一群數。而事實上，合成數是我們比較容易理解的概念，被分解就可以被合成，因此，質數也就是【非合成數】。

2. 1 不是質數

如果能不能被分解是判斷質數的標準，那麼 1 不是質數就會很突兀，因為，1 確實不能被分解，或許，這就是很多人心中很自然的疑惑，1 被分類為質數不是比較自然嗎？

您覺得呢？

我們的答案是：

因為質數還有一個特質是：它可以把別人分解。

顯然，1 沒有這一個特質，因此不得已，我們把 1 排除在質數的行列中，所以正整數分成三類：1、質數和 (可被) 合成數。

所以質數的定義是：在整數的乘法世界裡具有 (1) 不能被分解、(2) 可以把其他整數分解的兩個特質。

3. 質因數分解

於是，利用質數這一個乘法世界裡的 prime (原始數) 的特性，對於任何一個正整數 n ，都可以找到它的質因數分解式，常稱為標準分解式

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}, \text{ 其中 } p_1, p_2, \cdots, p_m \text{ 是相異質數。}$$

當我們把 1 排除在質數外，那麼這一個標準分解式就有【唯一的表示法】，這就是我們在網路找到 1 不是質數的原因。

4. 分解的意義

讓我們討論多一點點：何為分解？

$$6 = 1 \times 6 = 2 \times 3$$

上面兩個等式中，哪一個才是我們認知中的分解呢？

顯然，分解後必須得到兩個比原來的數還要小的數。既然如此，1 當然不是質數，而標準分解式也必然會唯一。不過要證明標準分解式唯一還有一些故事，有機會我們再寫一篇小文章說明。

5. 後記

以前課程中有質數，總會被小朋友問到【1 為什麼不是質數】的問題¹。我的看法是這是因為需要 (關於質因數分解) 而做出的選擇，

定義來自於選擇，而選擇的關鍵在於你的需要！

網路上，[李國偉](#)老師寫了一篇說明【1 為什麼不是質數】的文章，我就把篇名拿來用一下。李老師是我論文口試的評審老師，這也讓我想起我的指導老師譚必信老師，好懷念譚老師，謝謝他的指導。

¹或許當我們被國小、國中小朋友問到這問題時，可以採用本文的說明。如果問您的是高中生，那可以把標準式唯一的事情也順便講一講。