實數的完備性

bee*

111.09.25

數線是一條可以左右無限延伸，且沒有破洞的直線。

1. 實數系統的三個特性

(1) 代數特性：是一個體 (field)。

(2) 有序特性：可以比大小。

(3) 幾何特性：完備性 — 沒有破洞。

請想想看：這三個特性的意義爲何？

2. 體

體 (field) 是一個代數系統，就是給一個集合 (包含一堆元素)，還包含兩個運算 $+, \times$。要把體中的運算背起來是很辛苦的，所以不要背，只要記得：你知道的所有好性質它都有。

想想看，有那些好性質呢？

有交換律、有單位元素、有反元素、有分配律。對了、基本上要有封閉性和結合律，然後拿支筆寫下來。盡可能寫，只要你寫下來的性質都會正確。

3. 有序體

實數有一個好處是可以比大小，代數上來說，比大小有【三一律 trichotomy】、遞移律、加法律、乘法律。一樣，你自己拿支筆寫下來。

這個有序 (order) 的好處是甚麼呢？

*bee 美麗之家: http://www.beehome.idv.tw

實數是一個體、也有次序，因此，我們稱實數是一個【有序體】。不過，不是實數才是有序體，有理數也是有序體。換言之，有理數也是一個非常完整的代數體系，有理數比實數好操作很多，所以利用有理數來研究實數，變成我們可行的方法。

4. 實數的完備性

實數和有理數最大的不同是：實數 R 是線上所有點的坐標，而有理數 Q 無法把數線上所有的點都表示出來。

我們的看法是：實數是幾何數 (爲幾何需求而產生的)，有理數是四則運算下的結果。雖然，四則運算沒有辦法把幾何上的所有點都表示出來，但是因爲有理數有【稠密性】，所以只要加上數列這一個方法，實數就可以被完美研究。

研究實數的方法是：有理數列的極限。

關於實數，因爲我們想像線上的點坐標爲實數，所以假設數線是沒有斷點的 (或說沒有破洞，沒有斷點就是 gapless)，這是一個必要的假設，也就是所謂的【實數的完備公設】。

$\boxed{\text{實數的完備公設}}$：任選一個數線上的點坐標 r，則 r 將整個 R 分成兩個【非空】集合 A, B，集合 A 中的元素都比集合 B 中的元素小，且 r 還是 R 中的一個元素。

這一個說法實在很簡易明顯，我們稱爲 Dedekind cut 公設。

事實上，數學上的 Dedekind cut 不是這樣的說法。因爲，實數是幾何的，它雖然存在那裏，但是我們還不知道怎樣表示它。於是數學家理查 · 戴德金 (Julius Wilhelm Richard Dedekind, 1831∼1916，德國數學家，高斯的學生，比數學家黎曼年紀小，是黎曼的老朋友) 想了一個建構實數的自然想法。

$\boxed{\text{dedekind cut}}$：把有理數集 Q 分成兩個集合 A, B，滿足

(1) A, B 是兩個非空集合。

(2) $A \cup B = \mathrm{Q}$。

(3) A 中的元素比 B 中的所有元素來的小。

這樣的分割方法，稱爲 dedekind cut，那這種分割和實數的表示有何關係呢？答案是，每一個 dedekind cut 和每一個實數有一個一對一的映成對映，你可以想像成每一個分割中的 A 就對應一個不同的實數 r，而且每一個實數 r 都有一個分割中的 A(或者是這樣的分割) 可以表示它。

例如：實數 $\sqrt{2}$ 就對應一個 dedekind cut，其中 A 爲

$$A = \mathrm{Q} \cap \{x \le 0 \ \text{ 或 } \ x^2 < 2\} = \sqrt{2}$$

dedekind cut 的想法很自然，看到之後很容易接受。這說法和沒有破洞的想法一致，因爲使用了集合，很符合數學家從集合出發的習慣。

用有理數 Q 來表示實數 R 的原因是，Q 是可以被建構的，方法僅僅是四則運算。雖然我們用 dedekind cut 描述了實數，但是沒有啥特別的感覺，原因是，實數到底有啥特別的呢？

這不容易理解，因爲我們對於微積分知道的太少。所以要了解實數的特性，需要多認識微積分 (或是分析學) 的各種性質。

5. 最小上界性質

實數的完備性還有另一個說法：

$\boxed{\text{最小上界}}$：設 E 是一個 R 中有上界 b 的非空子集合，則 E 有最小上界。

這說法玄啦？啥意思？

對於數線上任意非空集合 E，若 b 是 E 的上界，則我們可以將 b 向左移動，一直移動到 c，使得 c 的左邊都不是上界，而 c 的右邊都是上界。可以看出來 c 把整個 R 分成兩個集合，因爲 c 是數線上的點，所以利用 Dedekind cut 公設得到 c 就是 E 的最小上界。

按上面這一個說法，是不是 Dedekind cut 的說法比最小上界的說法簡易一點！當然，這兩個說法是等價的 (這好像很顯然)。

這個最小上界性質，很實用。我們漸漸地把實數的完備性用【 各種樣貌 】表示出來，讓我們可以用這些樣貌去理解微積分裡面的各種性質。

6. 阿基米德原理

底下我們看一個顯然的定理 (但是它好像和實數的完備性無關？) 。

$\boxed{\text{阿基米德原理}}$：設兩實數 a, b 滿足 $0 < a < b$。則存在一個正整數 n。使得

$$na > b$$

這說法等價於：對於任何一個實數 r，都可以找到一個正整數 n，使得 $n \le r < n+1$。

再換個敍述：

$\boxed{\text{阿基米德原理之巧推理}}$：設 $a > 0$。則存在一個正整數 n。使得

$$0 < \frac{1}{n} < a$$

想一個問題：阿基米德原理是公設還是定理呢？

顯然是公設，因爲這是一個明顯的事實：b 既然被選定，那不就是個【有限數】，$\dfrac{b}{a}$ 當然也是有限數，於是選取 $n = \left\lfloor \dfrac{b}{a} \right\rfloor + 1$，[1]就可以得到 $na > b$。

如上所述，阿基米德原理是很自然的現象，應該不需要證明。

不過，當我們把實數的完備性和阿基米德定理擺在一起時，不禁想問：到底阿基米德原理的【本質】是甚麼呢？

答案是：實數 R 的幾何意義是一條【可以左右無限延伸】的直線，所以沒有最大的元素。

這件事常常被我們忽略了。不過實數的完備公設其實有說明：當我們選定一個實數 r 時，可以將整個實數集分割成兩個【非空】的集合。即

設 $r = \dfrac{b}{a}$。則 r 把實數分成兩個子集合 A, B，就是所謂的 dedekind cut，如果 A 中有沒有正整數，那取 $n = 1$ 即可，又如果 A 中有正整數，我們可以取 A 中的最大正整數 n_0，並得 $n_0 \leq r < n_0 + 1$，於是取 $n = n_0 + 1$，就可以得到阿基米德原理是正確的。

實數的完備性中隱藏著實數中沒有最大元素這一個事實 (可以用阿基米德原理表現)，幾何上就是可以左右無限延伸。換言之，不是只有沒有破洞這一個事實。

阿基米德原理隱藏在實數的完備性中，但實數的完備性比阿基米德原理更豐富，它還有沒有破洞這一個事實，所以阿基米德原理不是實數完備性的等價敍述 (有理數也具有阿基米德原理)[2]。

7. 稠密性

$\boxed{\text{稠密性}}$：設兩實數 a, b 滿足 $a < b$。則存在一個實數 (有理數、無理數) c 滿足

$$a < c < b$$

想想看：

(1) 爲何稠密性是正確的？

(2) 稠密性的本質爲何？

(3) 稠密性的重要性爲何？

---

[1] $\lfloor x \rfloor$ 是地板函數或稱高斯函數的符號。

[2] 回想大一的微積分課程，虎雄 老師會唱著：一步一步向前走，慢慢的走到校門口，看見老師行個禮，看到同學問聲好。本來以爲是老師在上課娛樂大家一下，其實是老師在說阿基米德原理。這回憶不知道還有多少同學記得。

在高一的數學課本中，總敍述著有理數有稠密性這一個性質，然後，在一些考卷上就會出現稠密性的問題，這對於高一的同學來說，很難理解為何需要談論有理數的稠密性。於是值得我們關注的是：為何需要在高一課本中談到【有理數具有稠密性】呢？

利用阿基米德原理可以證明稠密性，作法如下：

首先利用阿基米德原理找一個有理數 $q=\dfrac{m}{n_1}$ 界在 a,b 之間，然後再找一個正整數 n_2 使得 $q<q+\dfrac{1}{n_2}<b$，則有理數 $c=q+\dfrac{1}{n_2}$ 就被找到了[3]。

如果想找無理數 d 滿足 $a<d<b$，可以找 $d=q+\dfrac{1}{n_2\sqrt{2}}$。

現在剩下的問題是：稠密性的本質是甚麼？為何我們需要有理數的稠密性呢？

8.　完備公設的等價說法

(1) 單調有界必收斂。

(2) 區間套定理。

(3) 區間緊致定理。

(4) 數列緊致定理。

(5) 柯西收斂定理。

9.　單調有界

$\boxed{\text{單調有界定理}}$：給一個有上界 b 的遞增數列 $\{a_n\}$，則這一個數列會收斂。

我們可以用上界 b 在數線上向左移動，並設 B 為數列 $\{a_n\}$ 之所有上界所形成的集合，則 B 的下界就會是數列 $\{a_n\}$ 的極限。

單調有界定理和最小上界公設是一樣的內涵。這一個定理很好用，我們常用這一方法來估計無理數的值。

10.　區間套定理

$\boxed{\text{區間套定理}}$：給一序列的閉區間 $I_n=[a_n,b_n]$。若 $I_1\supset I_2\supset I_3\cdots$，則 $\bigcap\limits_{i\in N} I_i\neq\varnothing$。

這一個定理和單調有界定理是一樣的內涵。對嗎？

[3]這裡有點技術喔！

考慮 $\bigcap_{i\in N} I_i$ 應該是一個閉區間，這一個閉區間 $[\alpha,\beta]$ 的左端點 α 是 $\{a_n\}$ 的最小上界，而右端點 β 是 $\{b_n\}$ 的最大下界。

上面的說法顯然就是單調有界定理，區間套定理和單調有界定理等價很顯然。

如果我們加上 $\bigcap_{i\in N} I_i$ 的長度的極限是 0，那麼 $\bigcap_{i\in N} I_i$ 就是一個點 (這一個事實有應用的價值)。

區間套定理就是緊緻性概念的由來，緊緻集是分析學裡很棒的研究主題。

11. 數列緊致定理

$\boxed{\text{數列緊致定理}}$: 有界數列 $\{a_n\}$，可以找到收斂的子數列。

這定理大致上是先找到 $\{a_n\}$ 的一組上下界 c_1, d_1，然後用二分法，把 $[c_1, d_1]$ 等分成兩半，這樣這兩半的區間至少有一個會包含整個數列之無限多項。於是選取 $[c_1, \frac{c_1+d_1}{2}], [\frac{c_1+d_1}{2}, d_1]$ 中適合的一個區間爲 $[c_2, d_2]$，然後如法炮製下去，可得一序列的區間滿足 $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \cdots$，其中 $I_i = [c_i, d_i]$，於是這一系列的區間之長度的極限爲 0，且 $\bigcap_{i\in N} I_i = \{P\}$。

這代表啥意思呢？代表我們可以選取一個 $\{a_n\}$ 中的子數列 $\{b_n\}$，而且 $\{b_n\}$ 收斂到 P。

爲何這定理稱爲數列緊致定理呢？在很多書上稱此數列爲 Bolzano-Weierstrass 定理。這定理顯然是區間套定理的簡易推理 (等價敘述？)，那爲何稱爲緊致定理呢？到底何爲緊致呢？

【補充】: 卡爾·魏爾施特拉斯 (Karl Weierstrass，1815-1897，現代分析學之父，德國數學家)

12. 區間緊致定理

$\boxed{\text{區間緊致定理}}$: 對於一個非空的閉區間 $[a,b]$，如果有一組開區間 $\{I_1, I_2, \cdots, I_n, \cdots\}$ 是 $[a,b]$ 的覆蓋 (cover)，則我們只要找這一組開區間中的有限個 $\{I_1, I_2, \cdots, I_n\}$，就可以形成 $[a,b]$ 的覆蓋 (cover)。

談 cover 時，用的是【開區間】，緊緻的意思是：要控制閉區間，只要有限個開區間就可以了。這件事讓我們知道閉區間是比較好掌控的。

要證明定理正確，可以從 a 開始動手。

先找一個開區間 I_1 把 $a = a_1$ 包含進去，這樣剩下的就會是一個閉區間。假設這一個閉區間的左端點爲 a_2，則第二個區間 I_2 找把 a_2 包進去的區間，於是又剩下閉區間，其左邊端點爲 a_3，等等等。現在的問題是，$\{I_1, I_2, \cdots, I_n, \cdots\}$ 是一個覆蓋，換言之，右端點 b 必須在有限的步驟下被涵蓋進去，這代表依上述的方法，必須有一個開區間把 b 包進去了，這樣就結束了。如果無法結束，

那整個 $\{I_1, I_2, \cdots, I_n, \cdots\}$ 都被用光了，也無法覆蓋 b，這就和 $\{I_1, I_2, \cdots, I_n, \cdots\}$ 是一個覆蓋牴觸了。

不過證明可能不能這樣寫。可能得從 a_1 開始找 I_1，則依序有遞增數列 $\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$，這數列中的每個數，都告訴我們這是有限 cover 的右端點數列。顯然此數列是遞增數列且有上界 b，於是此數列有最小上界 c。

因爲 c 是最小上界，則給一個正數 ϵ，$c-\epsilon$ 不是上界。

這時候我們在 cover 中找一個開集 $(c-\epsilon_1, c+\epsilon_1)$，會發現這區間內小於 c 的點 $c-\dfrac{\epsilon}{2}$ 是有限 cover 的右端點，那再加上開集 $(c-\epsilon_1, c+\epsilon_1)$，得到 $c+\epsilon_1$ 是一個大於 c 的數，且有有限 cover，這說明 c 不是上界。

於是，數列 $\{a_1, a_2, a_3, \cdots\}$ 的收斂值應該超過 b，即可以找到有限的子 cover。

緊致性是閉區間很重要的性質，透過連續性，閉區間的值域還是閉區間，這樣就會有極值定理，這是我們關注且樂見的性質。

13. 柯西收斂定理

我們知道數列收斂的性質是：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ 表示任選一個正數 $\epsilon > 0$，可選得正整數 n_0，使得當 $n > n_0$ 時，可得 $|a_n - L| < \epsilon$。

數列收斂的性質說明，當我們考慮數列的極限時，只在意項數很多 (不考慮有限項) 時。

上面的描述是在知道數列的極限 L 時，如果我們不知道數列的極限，可以判別數列是否收斂嗎？

答案是：可以的。判別的方法是：柯西數列。

$\boxed{\text{柯西數列}}$：給一個數列 $\{a_n\}$，對於任一個正數 ϵ，如果可以找到正整數 n_ϵ，使得任意大於 n_ϵ 的兩正數 m, n，我們都有

$$|a_n - a_m| < \epsilon$$

則我們稱此數列 $\{a_n\}$ 爲柯西數列。

如果一個數列是柯西數列，則此數列收斂，反之，如果一個數列收斂，則此數列是柯西數列。這是一個重要的性質，意思是，只要能檢查是否爲柯西數列，就可以判定此數列是否收斂，而不需要知道這數列的收斂值。於是

【柯西收斂定理】: 數列 $\{a_n\}$ 是收斂數列若且爲若 $\{a_n\}$ 是柯西數列。

這一個定理可以用區間套定理推得，這也說明收斂的意義是在數列的【末端】, 是非常密集的。

14. 小結

上述的性質都是實數完備性的【等價敘述】,不過我們並不證明,感興趣的讀者可以參閱彰師大李國瑋老師的網路講義。

我們感興趣的是:為何需要這麼多描述實數完備性的等價敘述,這些等價敘述的用處何在?又實數的完備性究竟其本質為何?

我主張實數是幾何的,其本質是線上的點。我們希望用數學符號來描述點的位置,這種符號稱之為數。因為我們有四則運算,所以得到分數 (有理數),用分數來描數點位置,是一個很完美的方法。

因為分數是計算出來的,所以我稱其為代數產物,用代數產物來描述幾何性質,是數學上很棒的做法。

因為我們對於線上的點座標有深刻的認識,所以發現用分數來描述點座標 (實數),是需要技術的。這理由是,數線上的點有完備性,而分數沒有,它們之間的差別就在於我們認定【線必須沒有破洞】。例如我們認識 $\sqrt{2}$ 類的根號數,認識圓周率 π,認識尤拉數 e 等這些都不能用分數表示,於是分數是一個有很多破洞的體系,就變成實數和有理數之間的不同,而沒有破洞,就是我們說的完備性其中的一個特性。

我喜歡用 dedekind cut 的方式來描述實數的完備性。當你在數線上選一個點,兩側就形成一個分割,被選的這一個點,是左集合的最小上界,是右集合的最大下界,真是很簡單的描述方法。因為沒有破洞,這一個點是線上的點,就是一個實數,我們可以把它放到左集合,也可以放到右集合[4]。

在上文中提到的所有定理,只有阿基米德原理不是實數完備性的等價敘述。我們不禁想問:為何要提阿基米德原理?實數完備性除了說明實數沒有破洞之外,還敘述了那些性質呢?

答案是:因為數線是可以左右無限延伸的,所以任何一個實數都是有限的。

我們說線,是往左右可無限延伸的,而線上沒有最邊邊的點,所以每一個點都是有限的。在 dedekind cut 的敘述中,分割後的左集合和右集合都是非空的,這說明,你任選的點都是有限的,有其他點會在它的左邊 (較小) 或右邊 (較大)。於是,阿基米德原理是很顯然的,正整數可以一直往右移動,而任何一個實數都是有限的,於是超越它是很必然的事情。

然後利用倒數,對於任何正數 a,都可以找到一個正數整 n,使得 $0 < \dfrac{1}{n} < a$。

建議把每一個性質用自己的想法再反覆思索,實數的完備性是分析學的基礎,很多定理是建立在這些性質上的。分析課本應該不會只是將這些性質列出來而已,而是在分析學 (微積分學) 上有很重要的應用。

[4]數學上 dedekind cut 的說法不是我說的這樣。

15. 有理數稠密性的重要性

我們知道有理數集、無理數集、實數集都具有稠密性，這可以用阿基米德原理來幫忙證明。但是，我們其實只需要有理數之稠密性，爲何呢？

因爲每一個實數的附近，都有有理數 (這是有理數有稠密性的要義)，而有理數是可以計算所得的代數符號，所以，只要透過有理數的極限，就可以研究所有的實數 (當然重點在無理數)。

高中課本都會提有理數的稠密性，但是從來不說有理數的稠密性有何重要性。其實，這重要性可以用幾句話就說明清楚。

我們表示實數多用十進位的小數表示法，就是有理數稠密性的好處。在華羅庚老師的高等數學引論中，就是用十進位來引進實數的。

16. 實數的完備性

於是，我們有

$\boxed{\text{實數的完備公設}}$: 數線是一條可以左右無限延伸、且沒有破洞的直線。

$\boxed{\text{研究實數的方法}}$: 有理數列的極限。

$\boxed{\text{無理數}}$: 有理數集在數線上的破洞。

$\boxed{\text{值得研究的問題}}$: 所有的無理數。

17. 後續

這一篇文章得先停止，後續我們還有許許多多可以討論的主題。

例如 : 無理數和有理數的大不同 : 不可數性和可數性。完備性的好處 : 連續函數等等。

關於實數線上的測量，我已經寫完勒貝格測度，後續有空再慢慢補上分析學的基本知識。

18. 參考資料

在完備性的等價條件上，我參考了彰化師大李國瑋老師的網路講義，各位可以去李老師的網站下載講義。

一兩年前，我在齊震宇老師的微積分開放式課程有看到齊老師講解實數的完備性，好像台大陳金次老師也有開放式課程談到實數的完備性。如果各位有興趣，可以自行上網搜尋[5]。

[5]爲了不影響自己思考的機會，我沒有再去搜尋相關資料

我自己對實數完備性的感覺是：

實數是幾何的、有理數是代數的，

用有理數的極限來研究實數，讓我們有無限的題材。

19. 取代

這是實數完備性的第二版，第一版請見我的網頁。