微積分基本定理的證明

bee*

111.10.06

高中版、大學版，都試試看！[1]

1. 高中版定理敍述

$\boxed{\text{高中版}}$：設 $f:[a,b]\to \mathrm{R}$ 是連續函數，符號 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ 表示從 $t=a$ 到 $t=x$，函數 $y=f(x)$ 的圖形與 t 軸所圍出來的【有向面積】。則我們有

(1) $\dfrac{dF(x)}{dx}=f(x)$。

(2) $\displaystyle\int_c^d f(x)dx=F(d)-F(c)$。

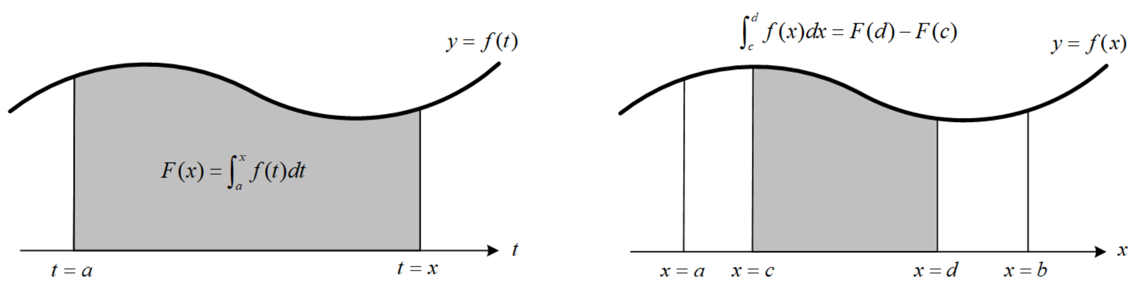

圖 1

想一下：定理在說些甚麼？

*bee 美麗之家: http://www.beehome.idv.tw

[1] 111.10.30 修正。

2. 高中版定理解說與補充

(1) 定理中先說明【定積分符號】$F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 的意義是有向面積。

有向面積指的是 t 軸的上方爲正面積、下方爲負面積，與函數值 $f(t)$ 的正負號有關。

把 x 軸稱爲 t 軸是不得已的，因爲符號中有個變數爲 x。

因爲是 $F(x)$ 表示的是有向面積，所以稱 $F(x)$ 爲面積函數。

(2) $\int_c^d f(x)dx = F(d)-F(c)$ 表示 <u>定積分的值爲有向面積函數值的差</u>。

我們也把 $\int_c^d f(x)dx$ 記爲 $F(x)\Big|_c^d$，即

$$\int_c^d f(x)dx = F(x)\Big|_c^d = F(d)-F(c)$$

(3) $\dfrac{dF(x)}{dx}=f(x)$ 說明面積函數 $F(x)$ 和高函數 $f(x)$ 之間的關係是微分關係。利用這關係，可以由高函數【反求】得面積函數，這種運算稱爲【不定積分】或反導運算。並將 $F(x)$ 記爲

$$F(x)=\int f(x)dx$$

3. 高中版定理證明

由圖 1 右圖，很容易可以理解 $\int_c^d f(x)dx = F(d)-F(c)$。我們只需證明 $\dfrac{dF(x)}{dx}=f(x)$ 即可。因爲

$$\frac{dF(x)}{dx}=\frac{F(x+dx)-F(x)}{dx}$$

由圖 2 可得細長的部分 $F(x+dx)-F(x)$ 的圖形接近一個長 $f(x)$，寬 dx 的長方形，因此可得

$$\frac{dF(x)}{dx}=\frac{F(x+dx)-F(x)}{dx}=\frac{f(x)\cdot dx}{dx}=f(x)$$

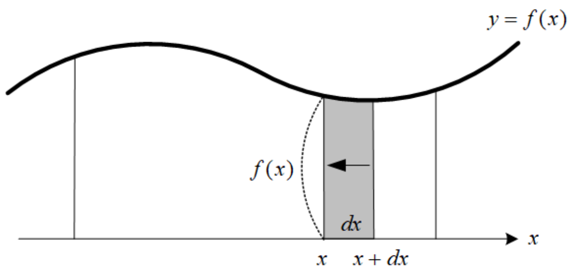

圖 2

圖 2 的事實，可以用 $\dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$ 表示，怎說呢？因爲

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) \Longrightarrow dF(x) = f(x) \cdot dx$$

這相當於說明細長條近似一個長方形。對高中同學而言，利用四則運算來理解微積分基本定理，是一個很簡單的好方法。

4.　大學版定理敍述

$\boxed{\text{大學版}}$：設 $f:[a,b] \to \mathrm{R}$ 是連續函數。我們有

(1) 定積分符號 $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ 是有意義的。
即我們有一個函數 $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$。其函數值表示從 $t=a$ 到 $t=x$，$y=f(x)$ 的圖形與 t 軸所圍出的【有向面積】。

(2) $\dfrac{dF(x)}{dx} = f(x) \Longrightarrow F(x) = \displaystyle\int f(x)dx$。

(3) $\displaystyle\int_c^d f(x)dx = F(d) - F(c)$。

5.　大學版定理解說

大學版和高中版最大的不同是，我們得考慮【有向面積】這名詞是不是有意義。我認爲這件事其實在大學微積分中也不是很重要，因爲 $y=f(x)$ 的函數圖形是一個連續圖形，它可以把區間 $[a,b]$ 的完備性 (無破洞) 帶到 $y=f(x)$ 的函數圖形上，所以去質疑 $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ 是不是有意義，似乎沒有必要。不過，在數學系裡總希望可以可以把基本概念都說明清楚，於是，我們來欣賞一下數學家的想法。

除了得證明有向面積函數 $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ 是有意義的之外，還要證明 $\dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$。在高中版本裡，我們直觀的把細長條的 $dF(x)$ 看成一個長方形，所以 $dF(x) = f(x) \cdot dx$。不過，對於這件事，我們好像有點一廂情願，不管 dx 有多小，似乎，$dF(x)$ 都不應該被視爲一個長方形，數學家可以用更精確的語言去說明 $dF(x) = f(x) \cdot dx$ 這一個事實嗎？

我個人傾向於理解高中版的微積分基本定理即可，即使是理工科中非數學系的同學，都沒有必要傷腦筋上面的兩個問題。我覺得只有在未來的研究方向上，需要涉及數學理論基礎的同學，才需要理解數學家更深入的想法。

不過，只要你對於數學是感興趣的，都可以試圖【體會】數學家的想法。這群聰明的專家，總想盡辦法去說明我們看到的現象，他們的想法是數學史吸引人的地方。

6. 大學版定理證明

6.1 有向面積 $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ 是有意義的

我們想像區間 $[a,b]$ 是沒有破洞的 (實數完備性)，然後定義長方形的面積爲【長乘以寬】，於是面積的概念就被定義且接受了。底下【有向面積】的概念，就建立在長方形的面積上。

符號 $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ 的意義是：

$$\int_a^x f(t)dt = \lim_{\Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Big(f(t_k) \cdot \Delta t_k \Big)$$

上式等號的右式是甚麼意思呢？

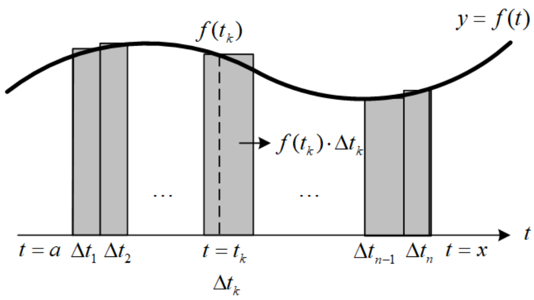

圖 3

如圖 3，我們把區間 $[a,x]$ 分割成很多個小段 $\Delta t_1, \Delta t_2, \cdots, \Delta t_n$，這樣的動作稱爲將區間 $[a,x]$ 做【分割】。然後在每一段 Δt_k 裡面找一個 t_k，然後取其函數值 $f(t_k)$，這樣可以得到許許多多的長方形，面積分別爲 $f(t_1)\Delta t_1, f(t_2)\Delta t_2, \cdots, f(t_n)\Delta t_n$。

現在將這些面積加起來，【再取極限值】，就是讓 Δt_k 的長度趨近於 0。如果這一個極限值存在，我們就說符號 $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ 有意義。

因爲 $f(t_k)\Delta t_k$ 是一個長方形的面積，於是不管做怎樣的分割，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\Big(f(t_k)\cdot\Delta t_k\Big)$ 都是有意義的。如果我們在要求 $\Delta t_k \to 0$ 的情形下，不管是怎樣的分割下，都可以得到相同的極限，那麼，我們就【承認】這曲線 $y = f(t)$ 和三直線 $t = a, t = x, y = 0$ 所圍出的區域是可以計算面積的。(雖然我們會感覺到，這樣的要求是不是太嚴苛了！)

要說明極限存在並不容易，想法是：

(1) 先在每一個分割段上，將 $f(t_k)$ 的值取最大值，看看極限會不會存在。

(2) 然後在每一個分割段上，將 $f(t_k)$ 的值取最小值，看看極限會不會存在。

(3) 最後利用夾擠定理把極限擠出來。

$\boxed{\text{極值定理}}$：設 $f:[a,b]\to \mathrm{R}$，則 $f(x)$ 有最大值 M，最小值 m。

這定理說明連續函數把有端點的線段 $[a,b]$【在不拉斷的情形下拉扯成】$y=f(x)$ 的圖形，因爲有端點，所以不管怎樣拉扯，都會有最高點和最低點，也就是有最大值和最小值。[2]

因爲每一分割段都有最大值，所以我們可以在每一個分割段 Δt_k 內選取最大值 M_k，然後設定

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(f(t_k)\cdot\Delta t_k\Big)=\sum_{k=1}^{n}\Big(M_k\cdot\Delta t_k\Big)$$

接下來因應 $\Delta t\to 0$：

我們先任取一組有限分割，然後以此有限分割爲基礎 (稱其爲基礎分割)，進行分割的【細緻化】。方法就是第二組分割是把第一組分割的每一個 Δt 再分割成更小的 Δt，然後再將第二組分割的每一個 Δt 再分割成更小的 Δt，以此類推。

假設每一組分割的面積和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\Big(M_k\cdot\Delta t_k\Big)=A_k$，則 $\{A_k\}$ 會形成一個遞減的數列。

理由是：細緻化的過程，英文稱爲 refine，例如一個分割段被切成 2 段，則這兩段的最大值 M_1, M_2 均小於或等於原分割段的 M，如此計算長方形的面積時，值就會小於原先的長方形值。如圖 4 所示：

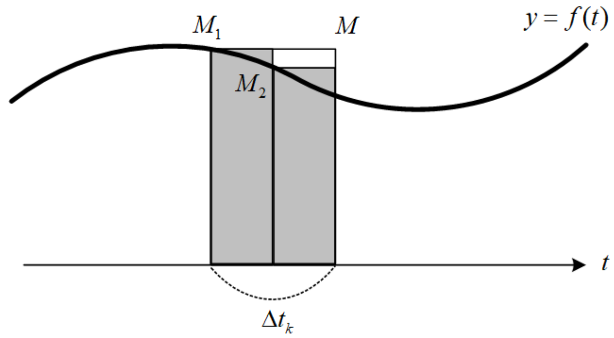

圖 4

因爲要求 $\Delta t\to 0$，所以我們需要一直做細緻化的動作，每細緻化一次，A_k 的值就會變小 (當然，也可能沒有變化)，這樣依序得到的數列是一個遞減【但有下界】的數列 (下界可以選取 $y=f(x)$ 的最小值 m 與 $x-a$ 的乘積)。

【根據實數的完備性】，可得數列 $\{A_k\}$ 收斂。

接下來我們想一下，從不同的基礎分割開始，是否每一個收斂值 U 都會相同呢？

會相同！因爲我們可以將兩個不同的基礎分割 refine 成一個更精緻的基礎分割，然後再進入精緻化，這樣就可以回到上面我們相同的討論內容。

[2] 關於此定理的證明，我們會另外寫一篇文章。

於是，設 $\overline{f(t_k)} = M_k$。不管從哪一個【基礎分割開始】，我們都可以得到：

$$\lim_{\Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \left(\overline{f(t_k)} \cdot \Delta t_k \right) = U \text{ (收斂值)}$$

利用相同的方式，設 $\underline{f(t_k)} = m_k$，我們也有

$$\lim_{\Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \left(\underline{f(t_k)} \cdot \Delta t_k \right) = L \text{ (收斂值)}$$

那麼，只要證明 $U - L = 0$，就可以說明定積分 $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ 是有意義的。

接下來我們得應用連續函數的一個重要定理：

$\boxed{\text{均勻連續定理}}$：設 $f : [a, b] \to \mathrm{R}$ 是一個連續函數，則 $f(x)$ 是一個均勻連續函數。

均勻連續的意思是：任取 $\epsilon > 0$，我們可以找到一個正數 δ，使得

$$\text{當 } \left|x_1 - x_2\right| < \delta \text{ 時，} \left|f(x_1) - f(x_2)\right| < \epsilon\text{。}$$

均勻連續的好處是：正數 δ 和 x 是沒有關係的，只要在 $\left|x_1 - x_2\right| < \delta$ 的範圍內，就可以讓函數值的差 $\left|f(x_1) - f(x_2)\right|$ 在 ϵ 的範圍內。

於是我們可以取 $\epsilon = \dfrac{1}{n}$，這時候找到一個正數 δ。因爲我們要求 $\Delta t \to 0$，於是選取的分割只要讓 $\Delta t_k < \delta$，則任一個分割段內的最大值 M_k 和 m_k 的差都小於 $\dfrac{1}{n}$。

於是

$$\begin{aligned} U - L &= \lim_{\Delta t_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} \left(\left(\overline{f(t_k)} - \underline{f(t_k)} \right) \cdot \Delta t_k \right) \\ &\leq \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \cdot (x - a) = 0 \end{aligned}$$

證明 $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ 有意義竟然這樣費神 !，令我們嚇了一跳。不過當我們欣賞這過程後，如果覺得辛苦，可以試著理解：定積分之所以有意義，是因爲實數的完備性 (數線沒有破洞)，加上連續函數把區間的沒有破洞特性帶到 $y = f(x)$ 的函數圖形上 (即可)。

補充一件事：積分這動作不一定只能在區間上運作，數學家可以更進一步將積分推廣，這內容可以在實變數函數論裡找到理論演進的過程。

6.2 面積函數 $F(x)$ 的導數是高函數 $f(x)$

接下來我們來證明

$$\frac{dF(x)}{dx} = \frac{F(x+dx)-F(x)}{dx} = f(x)$$

$\boxed{\text{中間值定理}}$：設 $f:[a,b]\to \mathrm{R}$，M 是 $f(x)$ 的最大值，m 是 $f(x)$ 的最小值，且 $m<k<M$。則我們可以在 (a,b) 內找到一個數 c，使得 $f(c)=k$。

設在 $[x,x+dx]$ 內 $f(x)$ 的最大值爲 M，最小值爲 m，則面積差 $dF(x)$ 滿足，

$$m\cdot dx \le dF(x) = F(x+dx)-F(x) \le M\cdot dx$$

底下我們把 $f(x)$ 在 $[x,x+dx]$ 的圖畫出來。

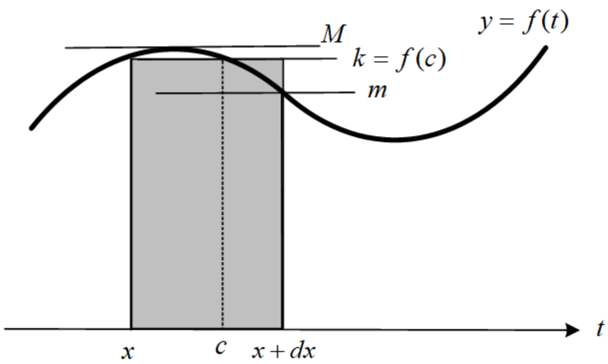

圖 5

我們讓鉛直線從 $t=x$ 向 $t=x+dx$ 前進，發現 $dF(x)=f(t)\cdot dx$ 的值在 $M\cdot dx$ 和 $m\cdot dx$ 間變化。因爲是一個連續變化，就會有個地方讓 $f(c)\cdot dx = dF(x)$，即

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(c)$$

因爲 $dx=0$ (即 $\Delta t\to 0$)，所以

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(c) = \lim_{\Delta t\to 0} f(x+\Delta t) = f(x)$$

雖然圖 5 中的 $c>0$，不過 $c<0$ 的情形也是一樣，透過上面的討論，我們得到面積函數 $F(x)$ 的導函數是高函數 $f(x)$。

7. 經典微積分課本內的定理敍述

底下是 James Stewart 之 Calculus 書中的敍述：

$\boxed{\text{第一部分}}$：設 f 是定義在 $[a,b]$ 上的連續函數，則

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt \qquad a\le x\le b$$

是一個在 $[a,b]$ 上的連續函數，在 (a,b) 上的可微分函數，且

$$\frac{dF(x)}{dx}=f(x)$$

$\boxed{\text{第二部分}}$：設 f 是定義在 $[a,b]$ 上的連續函數，則

$$\int_a^b f(x)dx=G(b)-G(a)$$

其中 G 滿足 $\dfrac{dG(x)}{dx}=f(x)$，並將 $G(x)$ 記爲 $G(x)=\displaystyle\int f(x)dx$。

我們得消化一下：爲何定理需要寫成兩部分呢？

第一部份說明的是：給一個在閉區間 $[a,b]$ 上的連續函數 $f(x)$，我們可以得到一個新的 C^1 (連續可微函數) $F(x)$，滿足 $\dfrac{dF(x)}{dx}=f(x)$。我們稱 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函數 (primitive function)。

這件事很特別，給一個連續函數，我們可以得到一個【 更棒的原函數 】，只要我們運用【 積分算子 】就可以做到。

第二部份說明只要找到一個滿足 $\dfrac{dF(x)}{dx}=f(x)$ 的原函數 $G(x)$，就可以計算定積分的值。把

$$\int_a^b f(x)dx=G(b)-G(a)$$

換個樣子看爲

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b dG(x)=G(b)-G(a)$$

用中文來說：

微量 $dG(x)$ 的和等於總量 $G(b)$ 與 $G(a)$ 的差。

這就是微積分基本定理的要義。

8. 延伸閱讀

寫完這篇文章，我上網查了一下資料，整理如下：

(1) 維基百科：裡面有歷史、定理敘述、定理證明，值得一看。

(2) 維基百科：黎曼積分。
我們現在談的積分，就是黎曼積分 — 區間積分，維基百科裡有專門談黎曼積分的專題，值得一看。

(3) 黎曼積分理論：國立彰化師範大學數學系李國瑋老師的講義，超級詳細。

(4) 教科書：Principles of Mathematical Analysis, Walter Rudin 著，第 6 章，The Riemann-Stieltjes Integral。

(5) 數學傳播 45 卷 2 期，教高中生微積分基本定理，張海潮教授。

(6) 微積分基本定理：我前幾年寫的心得，http://www.beehome.idv.tw/paper/1040910.pdf。