一個黎曼可積的問題

bee*

112.04.03

一個答案很顯然的問題，只是怎樣作證明！

1. 問題

$\boxed{\text{問題}}$：設 f 在 $[a,b]$ 上可以積分，而 E 是 $[a,b]$ 上的一個有限集合。

若在 $[a,b]-E$ 上 $g=f$，試證明 g 可積，且 $\displaystyle\int_a^b g(x)dx=\int_a^b f(x)dx$。

$\boxed{\text{想法}}$：這問題顯然是正確的，因爲有限點不會影響積分。

問題是可以黎曼積分的意思是：對於每一個正數 ϵ，都可以找到一個分割 P，使得 $|U(P,f)-L(P,f)|<\epsilon$。那我們怎樣把 f 的性質拉到 g 去。

$\boxed{\text{作法}}$：讓 $E=\{x_1\}$ 就好，其他的交給數學歸納法。

$\boxed{\text{先知道}}$：如果 P^* 是 P 的更精緻分割 (refine)，則

$$L(P,f)\le L(P^*,f)\le U(P^*,f)\le U(P,f)$$

於是，我們把 x_1 加到 P 裡面去，讓其變成 refine P^*。然後希望對於任意的 ϵ 都可以有 P^* 使得

$$U(P^*,g)-L(P^*,g)<\epsilon$$

*bee 美麗之家: http://www.beehome.idv.tw

因爲

$$
\begin{aligned}
&|U(P^*,g)-L(P^*,g)|\\
=&|U(P^*,g)-U(P^*,f)+U(P^*,f)-L(P^*,f)+L(P^*,f)-L(P^*,g)|\\
\leq&|U(P^*,g)-U(P^*,f)|+|U(P^*,f)-L(P^*,f)|+|L(P^*,f)-L(P^*,g)|
\end{aligned}
$$

所以，現在只要處理 $|U(P^*,g)-U(P^*,f)|$ 與 $|L(P^*,f)-L(P^*,g)|$ 即可。

原則上，$U(P^*,g)$ 和 $U(P^*,f)$ 應該是一樣的，除非在 x_1 上 $g(x_1)$ 突破了局部的最大值，於是，

$$|U(P^*,g)-U(P^*,f)|\leq c\times|g(x_1)-f(x_1)|$$

其中 c 是包含 x_1 的小區間。這時候，我們可以選擇將 P^* 在 x_1 兩側再更精緻化，使得

$$P^*=P\cup\{x_1-\frac{1}{2n},x_1,x_1+\frac{1}{2n}\}$$

這樣就可以得到

$$|U(P^*,g)-U(P^*,f)|<\frac{1}{n}\times|g(x_1)-f(x_1)|$$

$$\text{且}\quad |L(P^*,g)-L(P^*,f)|<\frac{1}{n}\times|g(x_1)-f(x_1)|$$

最後調整一下：對於任意正數 ϵ，選取 P 使得 $|U(P,f)-L(P,f)|<\frac{1}{3}\epsilon$，於是更精緻的 P^* 當然滿足 $|U(P^*,f)-L(P^*,f)|<\frac{1}{3}\epsilon$。

然後又 P^* 中的 $\frac{1}{n}$ 可以滿足

$$\frac{1}{n}\times|g(x_1)-f(x_1)|<\frac{1}{3}\epsilon$$

這樣，就可以讓

$$
\begin{aligned}
&|U(P^*,g)-L(P^*,g)|\\
\leq&|U(P^*,g)-U(P^*,f)|+|U(P^*,f)-L(P^*,f)|+|L(P^*,f)-L(P^*,g)|\\
\leq&\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)=\epsilon
\end{aligned}
$$

2. 最後

於是，我們設 $|E| = n$，$g = f_n$。利用數學歸納法，可得

(1) 函數群 $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 皆是黎曼可積分。

(2) 各積分值相等：$\int_a^b g dx = \int_a^b f_n dx = \int_a^b f_{n-1} dx = \cdots = \int_a^b f_1 dx = \int_a^b f dx$。

建議，自己把證明的過程寫的簡短一點。

3. 簡言之

對於任意的正數 ϵ，我們都可以找到一個分割 P 使得

$$U(P, f) - L(P, f) < \frac{\epsilon}{2}$$

於是，我們只要針對 $E = \{x_1, x_2, \cdot, x_n\}$ 把 P 精緻化即可。

因此，我們在每一個 x_k 的左右，各加上兩點 $x_k - \frac{1}{2m^2}, x_k + \frac{1}{2m^2}$，使得 $n \times \frac{1}{m^2} < \frac{\epsilon}{2}$，然後再將這些點放進 P 裡面形成一個新的分割 P^*，這樣

$$U(P^*, g) - L(P^*, g) < \frac{\epsilon}{2} + n \times \frac{1}{m^2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$