微積分基本定理證明的大綱

bee*

112.09.19

找出證明的關鍵處。

1. 定理敘述

$\boxed{\text{定理}}$:設 $f:[a,b]\to \mathrm{R}$ 是連續函數。我們有

(1) 定積分符號 $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ 是有意義的。

即我們有一個函數 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt$。其函數值表示從 $t=a$ 到 $t=x$,$y=f(x)$ 的圖形與 t 軸所圍出的【有向面積】。

(2) $\dfrac{dF(x)}{dx}=f(x)\left(\text{即 } F(x) \text{ 是 } \displaystyle\int f(x)dx \text{ 的一個成員}\right)$。

(3) 若 $\dfrac{dG(x)}{dx}=f(x)$,即 $G(x)=\displaystyle\int f(x)dx$,則 $\displaystyle\int_c^d f(x)dx=G(d)-G(c)$,

其中 $a\le c\le d\le b$。

2. 證明定理的預備定理

(1) 實數的完備性。

(2) 極值定理:設 $f:[a,b]\to \mathrm{R}$,則 $f(x)$ 有最大值 M,最小值 m。

(3) 均勻連續定理:設 $f:[a,b]\to \mathrm{R}$ 是一個連續函數,則 $f(x)$ 是一個均勻連續函數。

(4) 中間值定理:設 $f:[a,b]\to \mathrm{R}$,M 是 $f(x)$ 的最大值,m 是 $f(x)$ 的最小值,且 $m<k<M$。則我們可以在 (a,b) 內找到一個數 c,使得 $f(c)=k$。

*bee 美麗之家: http://www.beehome.idv.tw

3. 從最簡單的開始

$\boxed{\text{定積分計算法則}}$：$\displaystyle\int_c^d f(x)dx = F(d) - F(c)$。

$\boxed{\text{證明}}$：因爲 $\dfrac{dG(x)}{dx} = f(x)$，所以 $f(x)dx = dG(x) = G(x+dx) - G(x)$，因此

$$\int_c^d f(x)dx = \int_c^d dG(x) = \sum \big(G(x+dx) - G(x)\big) = G(d) - G(c) = G(x)\Big|_c^d$$

$\boxed{\text{想一下}}$：爲何當 $\dfrac{dG(x)}{dx} = f(x)$ 時，$G(x) = F(x) + c$？

4. 第二簡單的部分

$\boxed{\text{面積函數的導數爲高函數}}$：$\dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$。

根據極値定理：

$$mdx \leq dF(x) \leq Mdx$$

因爲 $f(x)$ 是連續函數，所以 $M - m = 0$，可得 $dF(x) = f(x)dx$，即 $\dfrac{dF(x)}{dx} = f(x)$。

5. 最困難的部分：$F(x)$ 是有意義的函數

也就是說，定積分符號 $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ 是有意義的。

$\boxed{\text{作法}}$：上和的極限與下和的極限相等，此極限值就是 $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$。

(1) 上和的極限 U 與下和的極限 L 均存在：實數的完備性。

(2) $U = L$：閉區間上的連續函數是均勻連續函數。

這部分，得慢慢說！