e 的魔術

bee*

112.11.04

我們知道 $e^{\pi i}+1=0$ 是最美麗的等式，

那 e 是怎樣冒出來的呢？

1. 前言

如果做一個票選，選最神奇美麗的數學式子，底下

$$e^{\pi i}+1=0$$

是公認的第一名。

理由是：我們所熟知的常數 $e,\pi,i,1,0$ 都出現了，而且透過簡單的加與乘就可以將這五個常數湊成一個等式，沒有多餘的東西，怪不得被稱爲最美麗的數學式子。

那這一個數學式子的數學意義是甚麼？我們可以用現行的高中數學來說明這一個數學式子呢？

2. 棣美弗公式

設 $z=\cos\theta+i\sin\theta$，我們有

$$z^n=(\cos\theta+i\sin\theta)^n \tag{1}$$

這一個式子稱爲棣美佛公式。這公式的幾何意義是：複數平面上 $\cos\theta+\sin\theta$ 的 n 次方，是在單位圓上轉圈圈。

而數學家精彩的發現是：我們可以把複數 $\cos\theta+\sin\theta$ 記爲 $e^{i\theta}$。

*bee 美麗之家: http://www.beehome.idv.tw

於是：棣美弗公式可以寫成

$$e^{i(n\theta)} = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

$\boxed{\text{想想看}}$：爲何可以將複數 $\cos\theta + \sin\theta$ 記爲指數型態：$e^{i\theta}$。

3. 找出 e 來

我們把複數 $\cos\theta + \sin\theta$ 記爲指數型態：$e^{i\theta}$，採用的底數是 e，這裡的 e 是尤拉數。原則上 e 是一個底數，但是 e 的眞實意義或其値，目前我們是沒有甚麼感覺的，那 e 倒底是誰呢？

利用棣美孚公式，我們有底下的推論。

4. 有點奇想的推論

因爲

$$e^{in\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

對所有的正實數 θ 都是正確的，所以我們取 $\theta = \dfrac{x}{n}$，可得

$$e^{ix} = e^{in\frac{x}{n}} = \left(\cos\frac{x}{n} + i\sin\frac{x}{n}\right)^n$$

對所有的正整數 n 都是正確的，然後，我們再讓 $n \to \infty$，可得

$$e^{ix} = \left(\cos\frac{x}{n} + i\sin\frac{x}{n}\right)^n = \left(\cos\frac{x}{\infty} + i\sin\frac{x}{\infty}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + i\cdot\frac{x}{n}\right)^n \tag{2}$$

$\boxed{\text{問題}}$：我們想問：(2) 式在複數平面上的幾何意義是甚麼呢？

上面這一個問題很有趣，且很重要。

5. e 冒出來

因爲

$$e^{ix} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + i\cdot\frac{x}{n}\right)^n \tag{3}$$

所以令 $x=-i$，可得

$$e=e^{i\cdot(-i)}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

e 的極限表示法就跑出來了。

6. 解釋

令 $x=i$ 確實是一個很有趣的想法，但是，合法嗎？e 冒出來的過程是代數的，那幾何意義是甚麼呢？

我們需要一個【 幾何上合理的解釋 】。

7. 結論

這是一篇有趣的上課講義，請讀者自行想想。如果你可以給個合理的看法，應該會增加不少樂趣。

本文的想法是尤拉的創見，我從林琦坤老師的開放式課程中看到尤拉的想法，上面的問題是我自己問的，e 跑出來的很有道理，這樣才有尤拉神奇的魔術表演。