Wallis 公式與 Stirling 公式

bee*

112.11.05

$n!$ 的估計公式。

1. Wallis 公式

一個漂亮的無窮乘積：

$$\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdots=\frac{\pi}{2} \tag{1}$$

可以寫成

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n-1}\right)\left(\frac{2n}{2n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(2^n\cdot n!)^4}{(2n!)^2(2n+1)}=\frac{\pi}{2} \tag{2}$$

$\boxed{\text{問題}}$：怎樣從 (1) 式寫出 (2) 式呢？

我們如果把左邊的無窮連乘積分成兩項兩項的來看，如下所示：

$$\frac{2}{1}\cdot\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\right)\cdot\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\right)\cdot\left(\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\right)\cdot\frac{8}{9}\cdots=\frac{\pi}{2} \tag{3}$$

大致可以看見這一個等式從 $\frac{2}{1}$ 漸漸變小到 $\frac{\pi}{2}$，這是很令人印象深刻的事情。

$\boxed{\text{問題}}$：怎樣知道極限值是 $\frac{\pi}{2}$？又爲何要將連乘積寫成極限的樣子呢？

*http://www.beehome.idv.tw

2. Euler 等式

Euler 發現一個很有趣的等式：

$$\sin x = x \cdot \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \cdot \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \cdot \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \cdots \tag{4}$$

$\boxed{\text{問題}}$：觀察 $y = \sin x$ 的函數圖形與 x 軸的交點，想想看：Euler 等式怎樣跑出來的？

利用 Euler 等式，令 $x = \frac{\pi}{2}$，即可得 Wallis 連乘積等式：

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots \tag{5}$$

想知道更多內容，請參閱 Green's Functions and Infinite Products 一書。

3. Stirling 公式

Stirling 公式是用來估計 $n!$ 用的。形式如下：

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \tag{6}$$

因爲 $n!$ 很難計算，所以需要估計公式。

我們簡單觀察如下：

$$n^{\frac{n}{2}} << n! << \left(\frac{n}{2}\right)^n << n^n \tag{7}$$

因爲 $n! << \left(\frac{n}{2}\right)^n$，所以把 2 改大一點，變成 $\left(\frac{n}{e}\right)^n$ 來近似 $n!$ 似乎不錯。(這裡的 gap 該怎樣跳過去呢？) 不過，Stirling 公式告訴我們說還是有點誤差，即

$$\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n} \to \infty \tag{8}$$

得多除以一個 $\sqrt{n}$ 才行，此時比值將收斂到 $\sqrt{2\pi}$。即

$$\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\cdot\sqrt{n}}\to\sqrt{2\pi}\tag{9}$$

4. 歷史

Stirling 公式其實是棣美弗最早想到的，他的結論是

$$n!\approx cn^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}=c\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\tag{10}$$

而 Stirling 證明了式 (10) 中的 $c=\sqrt{2\pi}$，所以估計式以 Stirling 命名。

5. 證明 Stirling 公式

我們借用 Wallis 公式。把 $n!$ 用 $L_n\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ 代入 Wallis 連乘積，可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2^n\cdot L_n\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n)^4}{(L_{2n}\sqrt{2n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n})^2(2n+1)}=\frac{\pi}{2}\tag{11}$$

整理得

$$L^2=2\pi\qquad\Rightarrow\qquad L=\sqrt{2\pi}\tag{12}$$

於是可得：$n!\approx\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$。(看過上面的介紹，可以試著把公式背起來嗎？)

6. 想出公式來 — 對數

不過到底怎樣可以想到此公式呢？

要處理連乘積非常困難，我們的妙招是取其對數，把連乘積變成連加和。

設

$$S(n)=\ln(n!)=\sum_{k=1}^{n}\ln k\tag{13}$$

利用對數的函數圖形很容易得到：

$$\int_1^n \ln x dx < S(n) < \int_1^{n+1} \ln x dx \tag{14}$$

計算

$$\int_1^n \ln x dx = (x \ln x - x)\Big|_1^n = n \ln n - n + 1 = n(\ln n - \ln e) + \ln e = \ln\left(e\left(\frac{n}{e}\right)^n\right) \tag{15}$$

同理可得

$$\begin{aligned}\int_1^{n+1} \ln x dx &= \ln\left(e(\frac{n+1}{e})^{n+1}\right) = \ln\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n(n+1)\right)\\ &= \ln\left((n+1)\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\\ &< \ln\left(e(n+1)\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)\end{aligned}$$

故可得

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e(n+1)\left(\frac{n}{e}\right)^n \tag{16}$$

上面的結論驚人。它說明

$$n! = \alpha(n)\cdot\left(e\left(\frac{n}{e}\right)^n\right) \tag{17}$$

我們用 Wallis 公式來幫忙把 $\alpha(n)$ 這一個函數找出來。

將 $\alpha(n)\cdot\left(e\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)$ 代入 Wallis 公式，得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2^n\cdot\alpha(n)\left(\frac{n}{e}\right)^n)^4}{(\alpha(2n)\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n})^2(2n+1)} = \frac{\pi}{2} \tag{18}$$

整理得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\alpha^2(n)}{\alpha(2n)}\right)^2\cdot\frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\alpha^2(n)}{\alpha(2n)} = \sqrt{n\pi} \tag{19}$$

於是選取

$$\alpha(n) = \sqrt{2n\pi} \tag{20}$$

即可得 $n!$ 的近似公式

$$n! = \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n \tag{21}$$

7. 研習閱讀

本文參考底下三篇文章：

1. 蔡聰明：談 Stirling 公式，數學傳播第 17 卷 2 期 (82 年 6 月)。
2. JACEK CICHO´N：Stirling approximation formula [1]
3. 沈淵源：從尤拉數 e 到 Stirling 常數，數學傳播第 20 卷 1 期 (85 年 3 月)。

8. Stirling 級數

事實上 Stirling 公式是一個級數：

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\frac{1}{12n}+\frac{1}{288n^2}-\frac{139}{51840n^3}+\cdots\right)$$

[1] https://cs.pwr.edu.pl/cichon/Math/StirlingApp.pdf