珈瑪函數

bee*

112.11.11

研習 Stirling 公式後的補充閱讀。

本文收集 Gamma function 的基本性質。

1. 緣由

Stirling 公式用來估計 $n!$，$n!$ 是一個離散的計算式。我們想問：有沒有一個函數，恰好在每個自然數的位置都和 $n!$ 相同呢？我們希望這一個函數的圖形是一個光滑曲線，找這一個曲線的目的是將階乘擴張其定義域，並使得函數是【解析的】。這種需求有許許多多的擴張方法，而 Γ 函數是【實務上】最好的選擇。

如果說：$e^{i\pi}+1=0$ 是最美麗的公式，那麼，珈瑪函數將是最美麗的函數。哇！真的嗎？

以上的說明來自於維基百科。本文是我在 107 年的閱讀心得。網路上有神奇的 Gamma 函數上、下二文，非常值得參考[1]。

2. 本文架構

(1) 寫出 Γ 函數的定義。

(2) 寫出 Γ 函數關於正整數幾個基本的性質。

(3) 擴張 Γ 函數的定義域。

(4) Γ 函數的解析延拓。

毫無疑問，這是複變數函數論的研究主題，也是 113 學年度我們的討論主題。

---

*bee 美麗之家: http://www.beehome.idv.tw

[1]請用維基百科連結。

3.　定義

對於正實數 s 來說，我們定義珈瑪函數 (gamma function) 爲

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t} dt = \int_0^\infty \frac{t^s}{t \cdot e^t} dt \tag{1}$$

這是一個非常奇怪的函數，定義來的很突然[2]，不過，它是一個非常重要的【 非基本函數 】。

這一個函數是否爲 well-defined 呢？

4.　考慮正實數

設 s 是一個正實數。關於 $\Gamma(s) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t} dt$，我們有底下的幾個觀察：

1. $\Gamma(0)$ 發散。
2. 當 $s \to 0$ 時，$\Gamma(s) \approx \dfrac{1}{s}$。
3. $\Gamma(1) = 1 = 0!$。
4. $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$。
5. 當 n 是一個正整數時，$\Gamma(n+1) = n!$。$\Gamma(s)$ 是 $n!$ 的連續表現。

如果上述的觀察都是正確的，這一個函數是不是很特別呢？

[2]有自然的想法嗎？

仔細研究上面的幾個觀察。

1.

$$\Gamma(0)=\int_0^{\infty}\frac{1}{te^t}dt>\int_0^{1}\frac{1}{te^t}dt>\frac{1}{e}\int_0^{1}\frac{1}{t}dt=\infty$$

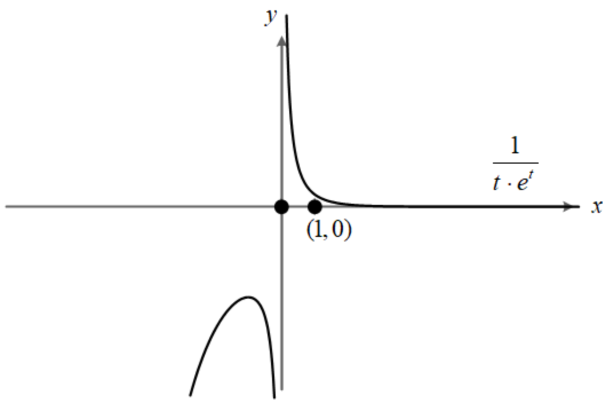

圖 1

2. 設 $s\to 0$。
因爲 $t^{s-1}\to\frac{1}{t}$，所以

$$\int_1^{\infty}t^{s-1}e^{-t}dt\approx\int_1^{\infty}\frac{1}{te^t}dt<\int_1^{\infty}\frac{1}{e^t}dt=\frac{1}{e}\quad(\text{是一個小於 1 的正數})$$

故可估計

$$\begin{aligned}\Gamma(s)=\int_0^{\infty}t^{s-1}e^{-t}dt&\approx\int_0^{1}t^{s-1}e^{-t}dt+\frac{1}{e}\quad(t\text{ 趨近於 0 才有影響力})\\&\approx\int_0^{1}t^{s-1}dt=\frac{1}{s}t^s\Big|_0^1=\frac{1}{s}\end{aligned}\tag{2}$$

實際計算：$\Gamma(0.1)=9.51,\Gamma(0.01)=99.43,\Gamma(0.001)=999.42,\Gamma(0.0001)=9999.42$。

3.

$$\Gamma(1)=\int_0^{\infty}t^0e^{-t}dt=-e^{-t}\Big|_0^{\infty}=1$$

4. 計算分部積分：

$$\int_{\epsilon}^{\frac{1}{\epsilon}} \frac{d}{dt}(t^s e^{-t})dt = \int_{\epsilon}^{\frac{1}{\epsilon}} st^{s-1}e^{-t}dt + \int_{\epsilon}^{\frac{1}{\epsilon}} (-1)t^s e^{-t}dt$$

當 $\epsilon \to 0$ 時 (此時 s 固定)，可得

$$\begin{aligned} \text{左式：} \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\epsilon}^{\frac{1}{\epsilon}} \frac{d}{dt}(t^s e^{-t})dt &= \lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{(\frac{1}{\epsilon})^s}{e^{\frac{1}{\epsilon}}} - \frac{\epsilon^s}{e^{\epsilon}}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^s}{e^n} - \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^s}{e^{\frac{1}{n}}}\right) = 0 \end{aligned}$$

故可得

$$\text{右式：} \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_{\epsilon}^{\frac{1}{\epsilon}} st^{s-1}e^{-t}dt + \int_{\epsilon}^{\frac{1}{\epsilon}} (-1)t^s e^{-t}dt\right) = s\Gamma(s) - \Gamma(s+1) = 0$$

即

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

5. 承上面的討論可得：

$$\begin{aligned} &\Gamma(1) = 1 = 0!, \quad \Gamma(2) = 1\times 0! = 1!, \quad \cdots \\ &\Gamma(n+1) = n\times(n-1)! = n! \end{aligned}$$

雖然上面我們對 $s > 0$ 的情形做了一些觀察，不過，我們的目標是要了解 $\Gamma(s)$ 是不是 well-defined？所以，接下來我們畫出幾個函數圖形。

這些函數是 $\Gamma(0.1)=\dfrac{t^{0.1-1}}{e^t}$，$\Gamma(0.9)=\dfrac{t^{0.9-1}}{e^t}$，$\Gamma(1)=\dfrac{1}{e^t}$，$\Gamma(2)=\dfrac{t^{2-1}}{e^t}$，$\Gamma(3)=\dfrac{t^{3-1}}{e^t}$。其中 $\Gamma(1)$ 是我們的參考函數。

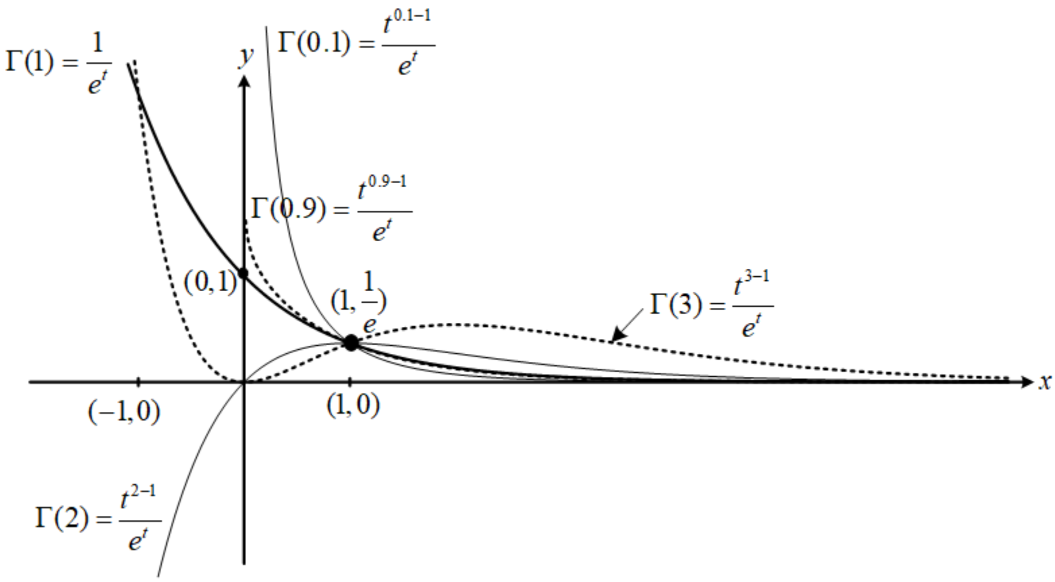

圖 2

觀察圖 2，我們把 $\Gamma(s)$ 分成兩個部分：

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt=\int_0^1 t^{s-1}e^{-t}dt+\int_1^\infty t^{s-1}e^{-t}dt \tag{3}$$

我們發現當 $s\to 0$ 時，$\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{s-1}}{e^t}dt$ 的值會漸漸變大，而當 $s\to\infty$ 時，$\displaystyle\int_1^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t}dt$ 的值會漸漸變大。因此，我們可以考慮 $s\to 0$ 和 $s\to\infty$ 兩種情形即可。

在前面的討論，我們已經知道當 $s\to 0$ 時，$\displaystyle\int_0^1 \frac{t^{s-1}}{e^t}dt\approx\frac{1}{s}$，所以這部分雖然可能值很大，但是當 s 被取值後，$\dfrac{1}{s}$ 是可計算的。

又 $\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$，所以雖然當 s 的值變大時，$\Gamma(s+1)$ 的值也會變大，不過還是可以控制(被 $(n+1)!$ 控制)，因此，$\Gamma(s)$ 這一個函數也是可以計算的的。故 $\Gamma(s)$ 是 well-defined。

多看兩個例子的圖：

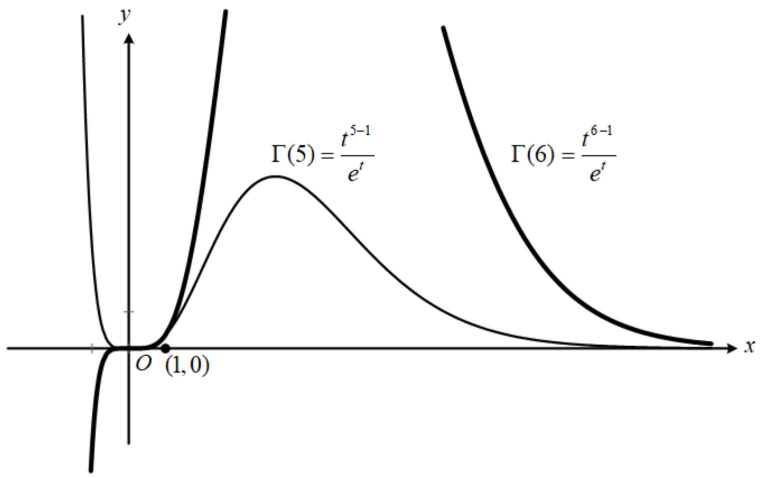

圖 3

5. 在 Re$(s)>0$ 的半平面上

我們可以把 s 的範圍由實數軸上的正實數推廣到半平面 Re$(s)>0$ 上，即

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt \text{ 在整個 } y \text{ 軸的右半平面上是有意義的。}$$

要推廣到半平面上，就是要在每一個條狀

$$S_{\delta,M}=\{\delta<\text{Re}(s)<M\}$$

定義出一個全純函數，其中 $0<\delta<M<\infty$。

接下來設 $\sigma=\text{Re}(s)$，可得 $|t^{s-1}e^{-t}|=t^{\sigma-1}e^{-t}$，關於積分的意義是

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}dt=\lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^{\frac{1}{\epsilon}} t^{s-1}e^{-t}dt$$

我們希望這一個極限在 $S_{\delta,M}$ 中是收斂的。

我們取

$$F_\epsilon(s)=\int_\epsilon^{\frac{1}{\epsilon}} t^{s-1}e^{-t}dt,\epsilon>0$$

首先看 F_ϵ 是不是全純函數？

這裡我們得先看一個預備定理：

定理 1. 設 $F(s,t)$ 是定義在 $\Omega\times[0,1]$ 的函數，其中 Ω 是 $\mathbb{C}$ 中的一個開集合。且 F 有以下的兩個性質：

(1) $F(s,\alpha)$ 是全純函數，其中 α 是一個定值。

(2) F 在 $\Omega\times[0,1]$ 上是連續函數，

則定義在 Ω 上的函數

$$f(s)=\int_0^1 F(s,t)dt$$

是一個全純函數。

這一個定理暫時不證明，但是我們來想一下它有啥特別的地方？

這一個定理是說：我們可以利用積分定義出一個新的全純函數 $f(s)$，區間 $[0,1]$ 可以改成任意有限區間 $[c,d]$。於是讓我們回頭看 F_ϵ。顯然 $f(s,t)=t^{s-1}e^{-t}$ 是一個全純函數，且 $f(s,t)$ 是一個連續函數，所以當我們做積分時，可得 F_ϵ 是一個全純函數。

接下來我們希望把 $\epsilon\to 0$，把 $F_\epsilon(s)\to\Gamma(s)$。這時候就是希望 F_ϵ 均勻收斂 (converge uniformly) 到 $\Gamma(s)$，這樣可以得到 $\Gamma(s)$ 是一個全純函數。

觀察

$$\left|\Gamma(s)-F_\epsilon(s)\right|\le\int_0^\epsilon t^{\sigma-1}e^{-t}dt+\int_{\frac{1}{\epsilon}}^\infty t^{\sigma-1}e^{-t}dt \tag{4}$$

先觀察 $\displaystyle\int_0^\epsilon t^{\sigma-1}e^{-t}dt$，我們有

$$\int_0^\epsilon t^{\sigma-1}e^{-t}dt<\int_0^\epsilon t^{\delta-1}dt=\frac{1}{\delta}t^\delta\bigg|_0^\epsilon=\frac{\epsilon^\delta}{\delta}\to 0$$

其次觀察 $\displaystyle\int_{\frac{1}{\epsilon}}^\infty t^{\sigma-1}e^{-t}dt$，我們有

$$\left|\int_{\frac{1}{\epsilon}}^\infty t^{\sigma-1}e^{-t}dt\right|\le\int_{\frac{1}{\epsilon}}^\infty t^{M-1}e^{-t}dt\le C\int_{\frac{1}{\epsilon}}^\infty e^{\frac{-t}{2}}dt\to 0$$

因此可得 $\Gamma(s)$ 在半平面 $\mathrm{Re}(s)>0$ 上是 well-defined。

6. 解析延拓 analytic continuation

接下來我們要把 $\Gamma(s)$ 的定義域推廣到整個複數平面 $\mathbb{C}$。

在前面已經證明過 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$，接下來我們用這一個性質幫忙，把 $\Gamma(s)$ 的定義域推廣到 (C)，當然，在 $s = 0, -1, -2, -3, \cdots$ 上是極點 (pole)，且在 $s = -n$ 的 residue 是 $\frac{(-1)^n}{n!}$。首先我們看怎樣把 $\Gamma(s)$ 的定義域推到 $Re(s) > -1$。定義

$$F_1(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s} \tag{5}$$

因爲 $\Gamma(s+1)$ 在 $\mathrm{Re}(s) > -1$ 的範圍裡是一個全純函數，因此，$F_1(s)$ 在 $\mathrm{Re}(s) > -1$ 裡是亞純函數，且僅在 $s = 0$ 的地方是一個極點 (pole)。

接下來我們看 F_1 在 $s = 0$ 處的 residue。因爲 $\Gamma(1) = 1$，所以

$$\mathrm{res}_0 F_1 = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{\Gamma(s+1)}{s} = \Gamma(1) = 1$$

於是，在 $\mathrm{Re}(s) > -1$ 這一個半平面，可定義新的 $\Gamma(s)$ 爲

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s} = F_1(s)$$

是一個亞純函數，且僅在 $s = 0$ 有極點，並得 $\mathrm{res}_0\Gamma = \mathrm{res}_0 F_1 = 1$。

繼續這樣的步驟，我們把定義域推到 $\mathrm{Re}(s) > -m$，m 是一個正整數，定義

$$F_m(s) = \frac{\Gamma(s+m)}{(s-0)(s-(-1))\cdots(s-(-(m-1)))} = \frac{\Gamma(s+m)}{s(s+1)\cdots(s+m-1)} \tag{6}$$

可得 F_m 在 $\mathrm{Re}(s) > -m$ 是一個亞純函數，且僅在 $s = 0, -1, -2, \cdots, -m+1$ 是極點，同時計算各極點 (n 是一個小於或等於 m 的正整數) 的 residue 爲

$$
\begin{aligned}
\text{res}_{-n} F_m(s) &= \lim_{s\to -n} (s+n) \cdot \frac{\Gamma(s+m)}{s(s+1)\cdots(s+n)\cdots(s+m-1)} \\
&= \lim_{s\to -n} \frac{\Gamma(s+m)}{s(s+1)\cdots(s+n-1)(s+n+1)\cdots(s+m-1)} \\
&= \frac{\Gamma(-n+m) = \Gamma(m-(n+1)+1)}{-n(-n+1)\cdots(-n+(n-1))(-n+n+1)\cdots(-n+m-1)} \\
&= \frac{(m-(n+1))!\Gamma(1)}{(-1)^n \cdot n! \cdot (m-(n+1)!)} \\
&= \frac{(-1)^n}{n!}
\end{aligned}
$$

這樣我們就把 $\Gamma(s)$ 解析延拓到整個複數平面上了。

7. $\Gamma(s)$ 函數的圖形

我們把 $\Gamma(s)$ 函數的圖形繪製如圖 4：

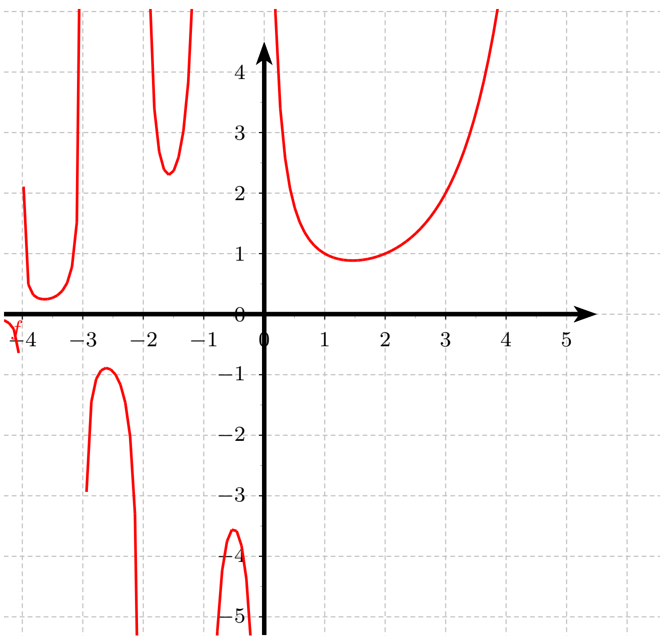

圖 4

問一個問題：當 $s > 0$ 時，函數的最小值爲何？

8. 參考資料

Stein & Shakarchi, Complex analysis, 2002: p.160 $\sim$ p.162.