

指數函數 e^z

謝銘峰*

115.09.25

這是一篇關於複函數之指數函數的小文章。取材於數學家 Walter Rudin 之【實分析與複分析】一書的前 4 頁。

我將其內容摘要下來，相當於讀過這 4 頁文章。用我的理解來撰寫，忠於 Rudin 的想法。而後，我會用另一種方式，將這篇文章的內容，用其他的方式再寫成一篇文章。

1. Rudin 之文章的重點整理

定義在複數平面上的指數函數 $w = e^z$ ，是複函數中最重要函數 (基本且重要)。

- (1) 直接定義 $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ 。
- (2) $e^z \neq 0$ ，其中 z 是任意複數。
- (3) $\frac{de^z}{dz} = e^z$ 。
- (4) 在 x 軸上， $e^x \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$ ， $e^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ 。
- (5) $e^{\frac{\pi}{2}i} = i$ ， $e^{n(2\pi i)} = 1$ ，其中 n 是整數。
- (6) $w = e^{ix}$ 把實數軸 x 軸映射到單位圓上。
- (7) e^z 是一個週期為 $2\pi i$ 的週期函數。
- (8) 每一個非零的複數 w ，都可以寫成 e^z 的樣子。

*bee 美麗之家: <https://www.beehome.idv.tw>

上面是 Rudin 敘述之指數函數 e^z 的各性質。看完這些性質，想想看：

究竟 Rudin 想表達甚麼呢？

了解指數函數 e^z ，可以說是研究複函數的第一步。Rudin 的書沒有圖，他用這些性質把 $w = e^z$ 的對應說清楚。如果讀者想直觀的理解這些性質，可以畫出【函數對應】用 C 平面到 C 平面的對應圖，看看能否從圖形理解 Rudin 想表達的內容。

練習：畫圖表示出指數函數 $w = e^z$ 的對應關係。

2. 細節第一部分

Rudin 的小文章不僅列出了 $w = e^z$ 的函數性質，還用非常嚴謹且獨特的方式把這些性質做出詳細嚴整的證明，底下我們來瀏覽一下。¹

(1) 定義 $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ 是一個絕對收斂的級數。

(2)

$$\begin{aligned} e^a \cdot e^b &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{b^m}{m!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a^k b^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a+b)^n}{n!} = e^{a+b} \end{aligned}$$

這樣就符合指數函數的要求。

(3) $e^0 = 1$ ，這很顯然。

(4) $\frac{de^z}{dz} = \frac{e^z(e^{dz} - 1)}{dz} = e^z \left(1 + \frac{dz}{2!} + \frac{(dz)^2}{3!} + \cdots \right) = e^z$ 。這很有意思！

¹Rudin 從一個定義出發，硬是把 $w = e^z$ 的性質證明完。這一個過程雖然僅僅花了書本的 4 頁，但是對於念數學系的學生來說，是一個很棒的數學饗宴。

(5) 設 $t \in R^+$, $e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$ 。顯然這是一個遞增函數，且當 $t \rightarrow \infty$, $e^t \rightarrow \infty$ ，
再由 $e^{-t} = \frac{1}{e^t}$ ，可得當 $t \rightarrow -\infty$, $e^t \rightarrow 0$ 。

(6) 檢查 e^{it} 和 e^{-it} 的關係，可得

$$\overline{e^{-it}} = e^{it}$$

於是， $|e^{it}| = 1$ 。這時候，我們取 $\cos t = \operatorname{Re}(e^{it})$, $\sin t = \operatorname{Im}(e^{it})$ ，即

$$e^{it} = \cos t + i \sin t$$

這樣 $\cos t$ 和 $\sin t$ 就登場了。而且因為 $|e^{it}| = 1$ ，所以 $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ 。

(7) 因為 $\frac{de^{it}}{dt} = ie^{it}$ 。於是

$$\begin{aligned} \frac{de^{it}}{dt} &= ie^{it} = i(\cos t + i \sin t) = -\sin t + i \cos t \\ &= (\cos t + i \sin t)' = (\cos t)' + i(\sin t)' \end{aligned}$$

因此， $(\cos t)' = -\sin t$ 且 $(\sin t)' = \cos t$ 。真是神奇！

(8) $e^{it} = 1 + \frac{it}{1!} + \frac{(it)^2}{2!} + \cdots = \cos t + i \sin t$ ，將其拆成實部和虛部，可得

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots \quad \text{和} \quad \sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \cdots$$

出現 $\cos t$ 和 $\sin t$ 的級數表示法。

(9) 考慮 $\cos t$ 的函數圖形，並計算 $\cos 0 = 1$, $\cos 2 < \frac{-1}{3}$ ，因為函數值在 $t = 0 \sim t = 2$ 之間遞減，所以恰有一個數 t_0 ，會使得 $\cos t_0 = 0$ ，於是我們規定 $2t_0 = \pi$ 。這樣，竟然 π 就出現啦！

我們暫時在這裡停一下，上面的故事是不是非常好玩呢？(底下留白)

3. 細節第二部分

(1) 再來看 $\sin t$ 。因為 $\sin 0 = 0$ ，又 $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ，可得 $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ (為什麼?)。

即

$$e^{\frac{\pi i}{2}} = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)i = i$$

(2) 計算 $e^{\pi i} = i^2 = -1$ ， $e^{2\pi i} = (-1)^2 = 1$ ，於是，對於任意整數 n ，我們有

$$e^{2n\pi i} = 1$$

(3) 但是，反過來說，若 $e^{yi} = 1$ ，是否 $\frac{y}{2\pi}$ 是一個整數呢？

假設有這樣的 y 滿足 $0 < y < 2\pi$ ，且 $e^{yi} = 1$ ，接著觀察 $e^{\frac{yi}{4}}$ 。因為設 $e^{\frac{yi}{4}} = u + iv$ ，

由於 $0 < \frac{y}{4} < \frac{\pi}{2}$ ，所以 u, v 皆為正實數 (為什麼)。

計算

$$e^{iy} = (u + iv)^4 = (u^4 - 6u^2v^2 + v^4) + 4iuv(u^2 - v^2) = 1$$

可得 $u^2 = v^2$ ，因為 $u^2 + v^2 = 1$ ，所以 $u^2 = v^2 = \frac{1}{2}$ ，並計算得

$$e^{iy} = -1$$

這是一個矛盾的結果，說明不存在滿足 $0 < y < 2\pi$ 的 y 。

也就是僅有 $2n\pi i$ 可以滿足 $e^{2n\pi i} = 1$ ，此處的 n 是一個整數。

(4) 再來驗證 e^{it} 把實數軸映射到單位圓上。

選取複數 w 滿足 $|w| = 1$ ，看看能否找到 t ，使得 $e^{it} = w$ 。

將 w 寫成 $w = u + iv$ ，因為 $|w| = 1$ ，又 $|e^{it}| = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$ ，利用 $\cos t$ 是連續函數，可得 t 是存在的。(這裡我省略一些推導過程)。

(5) 最後，對於任意非零複數 w ，可以寫成

$$w = |w| \cdot \alpha = |w| \cdot (\cos t + i \sin t) = e^x \cdot e^{iy} = e^{x+iy}$$

4. 感想

要介紹 $w = e^z$ 函數，從根本介紹起，真不是一件容易的事情。Rudin 選擇一個起點，然後利用基本的數學概念，把 e^z 的對應方式，完整的建立起來。

雖然這真不是一個【自然的方式】，至少起點不是那樣自然，但是，推導的過程，真是高潮迭起，短短 4 頁的文章，極其有趣。

這是 Rudin 的文章，我只是將其再寫一次。【中 Rudin】是一本有 20 章關於分析學的書，有興趣的讀者可以把書拿出來慢慢念。

如果你有原文書，那就自己跑一遍，不要看我重述的。如果，你看的是我重述的，那看完後，可以自己默寫一遍，體會一下 Rudin 寫書的感覺。

5. 最後

其實 Rudin 的文章只有 3 頁，第 4 頁 Rudin 做了一個積分：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\phi'(t)dt}{1+\phi^2(t)} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dt = \pi$$

其中 $\phi(t) = \frac{\sin t}{\cos t}$ ，也就是我們熟悉的 $\tan t$ 。

因此有 $\phi'(t) = 1 + \phi^2(t)$ 。而且 $\phi(t)$ 是一個在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 內遞增的函數，其值域為 $(-\infty, \infty)$ 。

這裡一樣，Rudin 的書本裡沒有畫圖，讀者們就自己畫圖看看這個瑕積分的圖形意義為何？