

指數函數 e^z

謝銘峰*

115.09.25

這是一篇關於複函數之指數函數的小文章。

我曾經將數學家 Rudin 之關於指數函數的文章做成摘要文章¹，本文則想從不一樣的觀點出發，再談一次複函數的指數函數，希望可以娛樂到喜歡我文章的讀者。

1. 尤拉數 e

$$e = 2.71828 \dots$$

更好一點： $e = 2.718281828459045 \dots$

2. 自然的定義

給一個指數函數 $y = a^x$ ，考慮函數圖形在點 $(0, 1)$ 處的切線，如果這一條切線的斜率為 1，則這一個底數 a 就是 e 。

這個想法很自然吧！

3. $\frac{de^x}{dx} = e^x$

計算一下：

$$\frac{de^x}{dx} = \frac{e^{x+dx} - e^x}{dx} = e^x \cdot \left(\frac{e^{dx} - 1}{dx} \right) = e^x$$

選擇適當的底數 e ，最簡單的微分公式就產生了。

*bee 美麗之家: <https://www.beehome.idv.tw>

¹Rudin 的指數函數

4. e^x 的泰勒展開式

有了 $\frac{de^x}{dx}$ ，就可以得到 e^x 的泰勒展開式：

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

這級數收斂的速度很快，可以估計得到 $e \approx 2.718281828 \cdots$ 。(要估計到幾項呢？)

5. 複數乘法

指數運算的特點是：把乘法用加法來算，即 $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$ ，而複數乘法有相同的特性：

$$(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

於是，靈機一動，把複數乘法看成指數運算，即設 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ，可將上式寫成

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} &= (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot (\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) = e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \end{aligned}$$

把實數的指數運算推廣到複數的指數運算，在推廣上是非常有趣的想法。

【問題】：這裡為何用 e 當作底數呢？

6. 尤拉奇想

關於複數，我們有棣美孚定理：

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$$

這一個式子對於任意正整數 n 都是成立的，於是把 n 拉到 ∞ ，這一個式子依然是正確的。而且

$$\cos \frac{\theta}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \cos 0 = 1 \quad \sin \frac{\theta}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\theta}{n}$$

於是，

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\cos \frac{\theta}{n} + i \sin \frac{\theta}{n} \right)^n = \cos \theta + i \sin \theta \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + i \frac{\theta}{n} \right)^n = e^{i\theta}$$

於是當我們令 $\theta = -i$ 時，可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

這是啥？

7. 尤拉的奇想二

看到尤拉把 $-i$ 代入 θ 時，我們不禁要問：可以這樣嗎？當然不行，對嗎？除非...

對於複數 z 而言，當 $z \rightarrow 0$ 時，

$$\cos z = 1, \quad \sin z = z$$

如果真是這樣，那尤拉的奇想就必然正確了。這是瞎碰做對了，還是尤拉其實早就知道這件事情了呢？

根據我們對於 $y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 的認識，可知兩函數的泰勒展開式分別為

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots, \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

將定義域由實數類推到純虛數時， e^x 和 $\cos x, \sin x$ 恰巧滿足 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ ，這樣，將 $e^{i\theta}$ 寫成 $\cos \theta + i \sin \theta$ ，似乎就不太突兀了，而當 $z \rightarrow 0$ 時， $\cos z = 1, \sin z = z$ ，也得到合理的感覺。尤拉奇想，其實是尤拉對 e^z 函數的理解，比我們透徹。這裡的 e^z 是一個複函數。

8. 單位圓

當我們把 i 視為 y 軸上的單位向量時， $\cos \theta + i \sin \theta$ 既是單位圓上的點坐標，也是單位圓上的向量， $e^{i\theta}$ 就表示單位圓，而 θ 是一條實數軸，於是函數 $y = e^{i\theta}$ 就變成從實數軸到單位圓的一個映射，也就是一個函數，它的本質是一個週期函數。因為每隔 2π 就會轉動一圈，指數函數 $y = e^{i\theta}$ 竟然是週期函數。

因為此處的 y 是一個複數，所以接下來我們用符號 w 表示，即有一個函數值是複數的函數 $w = e^{i\theta}$ 。

這一個函數的定義域可以再推廣到任意複數 z ，我們想知道

$$w = e^z$$

可以是怎樣的複函數呢？

9. 複函數 e^z

有了前面的基礎，其實要得到 $w = e^z$ 就不是太難了。

$$w = e^z = e^{a+bi} = e^a \cdot e^{ib} = e^a \cdot (\cos b + i \sin b)$$

於是 e^{ib} 是單位圓， e^a 是半徑， $w = e^z$ 把一個橫長條狀的區域，映射到整個複數平面 (除了原點之外)。

【仔細思考】:

- (1) 究竟 $w = e^z$ 是把怎樣的長條狀對應到整個平面的呢？
- (2) 已知 $w = e^{ix}$ 是將 x 軸上的點對應到單位圓上，那 $w = e^{2+ix}$ 是怎樣的對應呢？
- (3) 又 $w = e^{x+\frac{\pi}{4}i}$ 是怎樣的對應呢？
- (4) $w = e^z$ 是週期函數嗎？週期為何？

然後，我們想一件事情：那 $w = \cos z$ 是怎樣的函數呢？

10. 停下來

我們對於實函數 $y = e^x$ ， $y = \cos x$ ， $y = \sin x$ 已經很熟悉了， $y = e^x$ 是一個無界函數， $y = \cos x$ 是一個函數值介於 -1 和 1 之間的函數， $y = \cos x$ 也是一個週期函數，但 $y = e^x$ 不是週期函數，等等。

但是，對於複數函數 $y = e^x$ ， $y = \cos x$ ， $y = \sin x$ ，是否仍然和實函數具有一樣的性質呢？

數學上常做**【推廣】**這一件事，從已知的事實出發，把已知的數學概念，應用到更廣的範圍內。那我們在複數範疇內，是否推廣的過程中，依然可以維持住原較小範圍內的性質呢？

11. 討論函數 $w = \cos z$

我們對於 $w = \cos z$ 真是不熟，也沒有辦法像實函數那樣的理解，那究竟甚麼是 $w = \cos z$ 呢？這裡產生了一個有趣的問題！

【問題】: 何為複函數的餘弦函數 $w = \cos z$ 呢？我們想知道函數的本質。

12. 結語

理解複函數的指數函數 e^z 是進入複函數的第一步。在 Rudin 的大作「Real and Complex Analysis」一書中，很特別的在書的最前面介紹了 e^z 。究竟 Rudin 的想法是甚麼呢？

我們沒有辦法問到 Rudin 本人，但可想得這函數是有多【基礎】、【重要】與【充滿樂趣】。

大學時學高等數學，太不專心、太敷衍、太重視形式，沒有時間好好沉浸在其中。現在手邊的這些好書，其實在我念大學時，都已經出版了。懊悔過去的不珍惜，慶幸現在有空重新回到這些書本裡，好好的再思索很多很多次，真是幸福滿滿。

很開心當個高中數學老師²，很開心有機會在淡江念兩年碩班，很開心教書的過程中總能拾起很多數學的本質，這種幸運，應該感謝上天對我的眷顧。

特別的日子，特別開心，快退休了，會有更多時間讀書、爬格子，希望可以體會到更多的數學本質。³

² 如果你是一位高中數學老師，是不是很开心能在高中教書呢？

³ $w = \cos z$ 應該是下一篇小文章，並祝福今天的壽星：生日快樂！